

I. Divisibilité**1. Les critères : Rappel**

Un nombre est divisible :

- Par 2, si son chiffre des unités est pair : 0, 2, 4, 6, 8.
- Par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Par 10, si son chiffre des unités est 0.
- Par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemple

30 est divisible par 2, 5, 10 et 3 (mais aussi par 6 car par 2 et 3).
2061 est divisible par 3 et par 9 (car $2+0+6+1=9$).

2. Nombres premiers**Définition**

Un nombre est premier s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Exemple

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... sont des nombres premiers. Cette liste est infinie.
(Voir Myriade : activité 3 p 39 : crible d'Eratosthène).

Remarque

1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

3. Nombres premiers entre eux**Exemples**

$60 = 1 \times 60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 = 6 \times 10$
Tous les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

$100 = 1 \times 100 = 2 \times 50 = 4 \times 25 = 5 \times 20 = 10 \times 10$
Tous les diviseurs de 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

Les diviseurs communs à 60 et à 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20.

$$20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5$$

Tous les diviseurs de 20 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20.

$$63 = 1 \times 63 = 3 \times 21 = 7 \times 9$$

Tous les diviseurs de 63 sont : 1, 3, 7, 9, 21, 63.

Le seul diviseur commun à 20 et à 63 est 1.

On dit dans ce cas que 20 et 63 sont premiers entre eux.

Ce qui n'est pas le cas de 60 et 100 qui ont plusieurs diviseurs communs.

Définition

On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.

II. Application aux fractions

1. Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

Propriété

Tout nombre peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Exemples

$20 = 2 \times 2 \times 5$ est une décomposition du nombre 20 en produits de facteurs premiers.

$$231 = 3 \times 7 \times 11$$

$$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$$

Exercice 1

Décomposer 300 en produits de facteurs premiers.

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

La décomposition en facteurs premiers de 300 est : $300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

2. Fraction irréductible

Définition

On dit qu'une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exercice 2

Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$

Méthode

Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs, puis simplifier au maximum.

$$\begin{array}{r|l}
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 126 & 2 \\
 63 & 3 \\
 21 & 3 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}$$

Ainsi on a : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ et $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$.

$$\text{Donc } \frac{60}{126} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}.$$

Remarque

On peut chercher le PGCD du numérateur et du dénominateur.

Ici le $PGCD(60;126) = 2 \times 3 = 6$

$$\text{Donc } \frac{60}{126} = \frac{6 \times 10}{6 \times 21} = \frac{10}{21}$$

3. Méthode de la division euclidienne

Pour déterminer le PGCD de 2 nombres, on peut utiliser la méthode de la division euclidienne.

$$96 = 36 \times 2 + 24$$

$$36 = 24 \times 1 + 12 \quad \text{donc le } PGCD(96;36) = 12 \text{ (dernier reste non nul)}$$

$$24 = 12 \times 2 + 0$$

Application : Calculer $PGCD(1008;304)$, $PGCD(1926;376)$

Utilisation de la calculatrice

Exercice 3

Un confiseur dispose de 3150 bonbons au chocolat et de 8820 bonbons au café. Il veut répartir ses bonbons dans des boîtes de composition identique de telle sorte que tous les bonbons soient utilisés. il souhaite également réaliser le plus grands nombre possible de boîte.

1. Combien pourra-t-il réaliser de boîtes ?
2. Dans chaque boîte, combien y aura-t-il de bonbons de chaque sorte ?