06 : Théorème de Thalès et réciproque

I. Théorème de Thalès dans un triangle

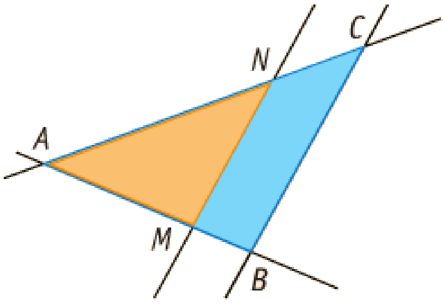
Rappels de quatrième

Théorème

Dans un triangle *ABC*, si :

- $M \in [AB]$
- $N \in [AC]$
- $(MN)//(BC)$

On a alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



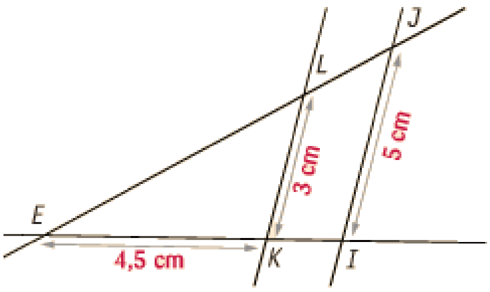
Remarques

- Pour retenir les égalités des rapports, on identifie les droites parallèles dans le triangle, puis à partir du seul point qui n'en fait pas parti, on calcule « petit côté sur grand coté ».
- On peut résumer la situation en écrivant : « les triangles *ABC* et *AMN* sont en situation de Thalès car les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
- En situation de Thalès, un triangle est un agrandissement de l'autre. On dit alors que les triangles sont semblables. Ils ont les côtés 2 à 2 proportionnels.

Application 1

Sur la figure, on a $EJ = 10\,\text{cm}$ et $(LK)//(IJ)$.
On veut calculer *EI* et *EL*.

Les triangles *EIJ* et *EKL* sont en situation de Thalès car les droites (KL) et (IJ) sont parallèles. On a :
$\frac{EL}{EJ} = \frac{EK}{EI} = \frac{KL}{IJ}$.
On a donc : $\frac{EL}{10} = \frac{4}{EI} = \frac{3}{5}$.



On veut calculer *EI*.

On a alors : $EI = \frac{4,5 \times 5}{3} = 7,5\,\text{cm}$.

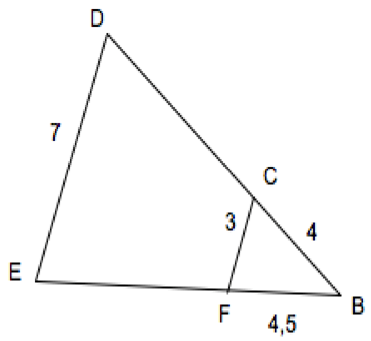
On veut calculer *EL*.

De même on a : $EL = \frac{10 \times 3}{5} = 6\,\text{cm}$.

Application 2

Sur la figure, on a $(CF)//(DE)$.
On veut calculer *BD* et *EF*.

Les triangles *BDE* et *BCF* sont en situation de Thalès car les droites (CF) et (DE) sont parallèles.



On a : $\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{BF}{BE}=\dfrac{CF}{DE}$.

On a donc : $\dfrac{4}{BD}=\dfrac{4,5}{BE}=\dfrac{3}{7}$.

On veut calculer *BD*.

On a alors : $BD=\dfrac{4\times 7}{3}=\dfrac{28}{3}$ (valeur exacte)

$BD\simeq 9,3$ (valeur approchée)

On veut calculer *EF*.

On a : $BE=\dfrac{4,5\times 7}{3}=10,5$.

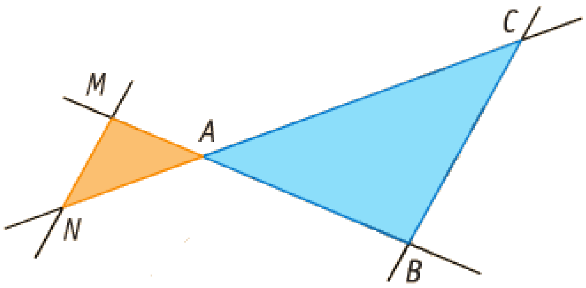
Donc $EF=BE-FE=10,5-4,5=6$.

II. Théorème de Thalès « version papillon »

Théorème

- Les droites (MB) et (NC) sont sécantes en *A*,
- Les droites (MN) et (BC) sont parallèles,

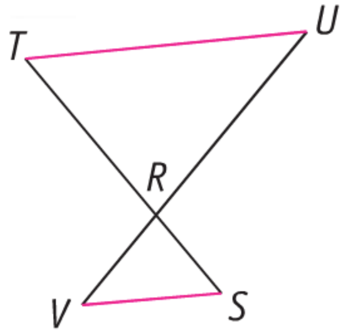
On a alors : $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC}$



Application 3

Sur la figure, on a $(TU)//(VS)$.
On donne $TR=6$, $RU=8$, $RS=4$ et $VS=7$.
On veut calculer *TU* et *RV*.

Réponse



Les triangles *RTU* et *RVS* sont en situation de Thalès car les droites (TU) et (VS) sont parallèles.

On a alors : $\dfrac{RS}{RT}=\dfrac{RV}{RU}=\dfrac{SV}{TU}$

On a donc : $\dfrac{4}{6}=\dfrac{RV}{8}=\dfrac{7}{TU}$.

On veut calculer *TU*.

On a alors : $TU=\dfrac{6\times 7}{4}=10,5$.

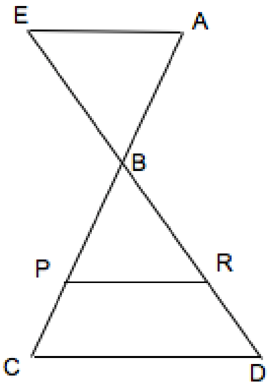
On veut calculer *RV*.

De même on a : $RV=\dfrac{8\times 4}{6}=\dfrac{16}{3}$ (valeur exacte). $RV\simeq 5,3$ (Valeur approchée)

Application 4

Les droites (EA), (PR) et (CD) sont parallèles.
On donne $EB=2$, $BD=5$, $PR=4$ et $CD=6$.
On veut calculer *BR* et *EA*.

Calcul de *BR*



Les triangles *BCD* et *BPR* sont en situation de Thalès car les droites (PR) et (CD) sont parallèles.

On a alors : $\dfrac{BP}{BC}=\dfrac{BR}{BD}=\dfrac{PR}{CD}$.

Donc $\dfrac{BP}{BC}=\dfrac{BR}{5}=\dfrac{4}{6}$ donc $BR=\dfrac{4\times 5}{6}=\dfrac{10}{3}\approx 3,3$

Calcul de *EA*

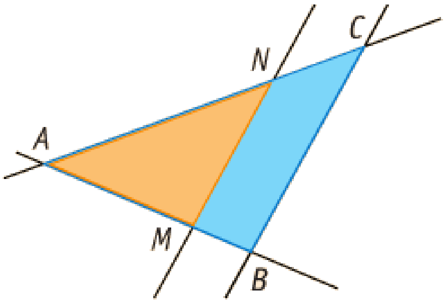
Les triangles *BEA* et *BCD* sont en situation de Thalès car les droites (EA) et (CD) sont parallèles.

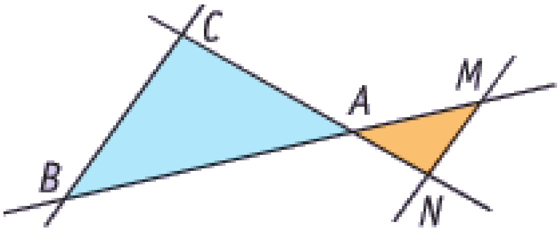
On a : $\dfrac{BE}{BD}=\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{EA}{DC}$ donc $\dfrac{2}{5}=\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{EA}{6}$ donc $EA=\dfrac{2\times 6}{5}=2,4$

III. Reconnaître des droites parallèles

1. Propriété

Si les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A, et si $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.



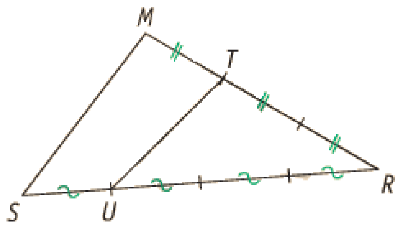


Exemple

- $\dfrac{RT}{RM} = \dfrac{2}{3} \simeq 0,67$
- $\dfrac{RU}{RS} = \dfrac{3}{4} = 0,75$

On a donc $\dfrac{RT}{RM} \neq \dfrac{RU}{RS}$.

Donc les droites (TU) et (MS) ne sont pas parallèles.



Remarque

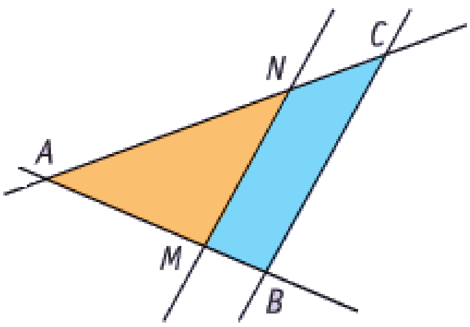
Pour vérifier une égalité de rapports, on peut utiliser le produit en croix :

$\dfrac{2,4}{3,6} = \dfrac{3}{4,5}$? $\quad 2,4 \times 4,5 = 10,8$ et $3,6 \times 3 = 10,8$ donc on a bien $\dfrac{2,4}{3,6} = \dfrac{3}{4,5}$

2. Réciproque du théorème de Thalès

Si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

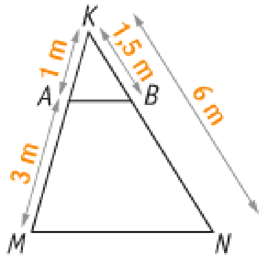
Et si les points A, M et B sont alignés dans le même ordre que les points A, N et C, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



Exemple

- $\dfrac{KA}{KM} = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$
- $\dfrac{KB}{KN} = \dfrac{1{,}5}{6} = \dfrac{1}{4}$

On a bien $\dfrac{KA}{KM} = \dfrac{KB}{KN}$



Les points K, A et M sont alignés dans le même ordre que les points K, B et N, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

Application 5

On donne la figure suivante :
Les droites (GH) et (JK) sont-elles parallèles ?