08 : Probabilités

I. Expérience aléatoire

Définition

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est uniquement dû au hasard.

Exemples

- Lancer d'un dé à 6 faces.
- Jet d'une pièce de monnaie.
- Tirage d'une boule dans une urne…

Définition

Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est une issue de l'expérience.

Exemples

Expérience aléatoire	Issues
Lancer d'un dé	$\{1;2;3;4;5;6\}$
Jet de pièce de monnaie	$\{Pile;Face\}$

II. Evénements

Définition

Un événement est une condition qui, selon l'issue de l'expérience aléatoire, est réalisée ou n'est pas réalisée.

Exemple

On effectue l'expérience aléatoire suivante :
On fait tourner la roue de loterie ci-contre.
On note le secteur désigné par la flèche une fois la roue arrêtée.
Cette expérience admet quatre issues : R1, R2, R3 et J2.

- L'événement : « Obtenir le nombre 4 » n'est réalisé par aucune issue.
- L'événement : « Obtenir la couleur jaune » est réalisé par une seule issue : J2.
- L'événement : « Obtenir le nombre 2 » est réalisé par deux issues : J2 et R2.

Définition

- Un événement élémentaire est un événement qui ne peut être réalisé que par une seule issue.
- L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble de toutes les issues qui n'appartiennent pas à A.

Exemple

On reprend la loterie précédente.

- L'événement : « Obtenir le nombre 3 » est élémentaire.
- L'événement : « Obtenir la couleur rouge » est l'événement contraire de l'événement « Obtenir la couleur jaune ».

Exercice 1

Une urne contient les boules ci-dessous indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de cette urne.
On considère les événements suivants :
A : « Obtenir une boule rouge » ;
B : « Obtenir une boule bleue » ;
C : « Obtenir le nombre 1 » ;
D : « Obtenir le nombre 2 » ;
E : « Obtenir un nombre impair ».

Préciser les issues qui réalisent chaque événement, ainsi que leur événements complémentaires.

III. Probabilité d'un événement

1. Définition et propriétés

Définition

Lorsque l'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence à laquelle se réalise un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée probabilité de cet événement.

Exemple

Faire la simulation d'un lancer de dé

En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente et vers le nombre $\frac{1}{6}$, appelé probabilité.

Propriétés

- Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
- Un événement dont la probabilité est nulle est un événement impossible.
- Un événement dans la probabilité est égale à 1 est un événement certain.
- La somme des probabilités d'obtenir chaque issue est égale à 1.

2. Cas d'équiprobabilité

Définition

Pour une expérience aléatoire, lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Propriété

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement est égale au quotient du nombre d'issues qui le réalisent par le nombre total d'issues.

Exercice 2

Un sac contient les 6 boules ci-dessous indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule du sac.
1. Quelle est la probabilité de chaque issue ?

2. Quelle est la probabilité des événements suivants :
a. A : « Tirer une boule rouge » ? **b.** B : « Tirer une boule portant le numéro 3 » ?

c. C : « Tirer une boule ayant un numéro pair » ?

IV. Evénements incompatibles

1. Définition

Deux événements qui ne peuvent pas se produire en même temps sont dits incompatibles.

Exemple

Dans l'exemple précédent, les événements A et B sont incompatibles, car il n'y pas de boule rouge portant le numéro 3.
Les événements A et C ne sont pas incompatibles, car il y une boule rouge portant le numéro 2 et donc qui réalisent les deux événements.

2. Propriété

Si deux événements sont incompatibles, alors la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme des probabilités de ces événements.

Exemple

Dans l'exemple précédent, comme les événements A et B sont incompatibles, alors on a :

$$P(\text{Obtenir Rouge ou } 3) = P(\text{Obtenir Rouge}) + P(3) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Attention

$$P(\text{Obtenir Rouge ou Pair}) \neq P(\text{Obtenir Rouge}) + P(\text{Pair}).$$

3. Événement contraire

L'événement contraire d'un événement A se note *non A* ou $\overline{A}$.
L'événement *non A* est réalisé lorsque l'événement A n'est pas réalisé.
On a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple

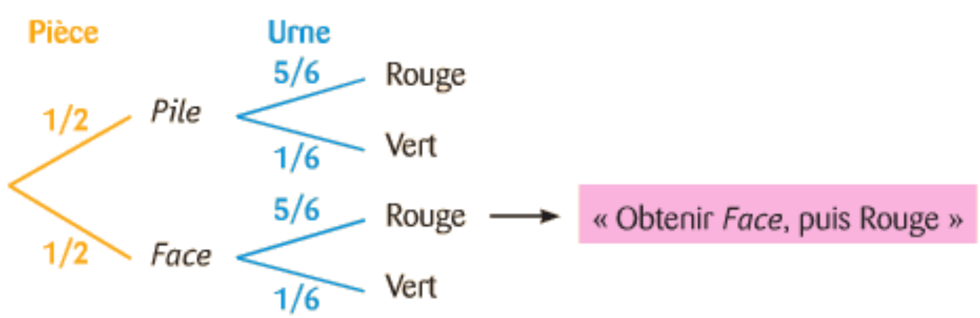
Dans l'exemple précédent, l'événement contraire de l'événement A est :
$\overline{A}$: « Ne pas tirer une boule rouge », c'est-à-dire $\overline{A}$: « Tirer une boule grise ».

$$P(\text{grise}) = 1 - P(\text{Rouge}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

V. Utilisation d'un arbre

Exemple

On lance une pièce de monnaie puis on tire une boule d'une urne qui en contient 5 rouges et une verte.
On peut représenter cette expérience à deux épreuves à l'aide d'un arbre pondéré.



Propriété

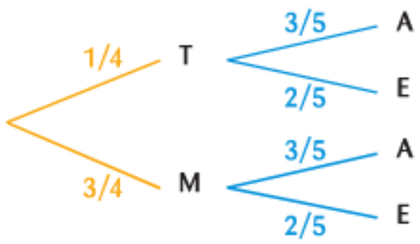
Dans un arbre pondéré, la probabilité de l'événement auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées sur ce chemin.

Exemple

$$P(\text{Obtenir Face puis rouge}) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$

Exercice 3

Une expérience à deux épreuves est représentée par l'arbre pondéré suivant :



1. Donner les couples de lettres ainsi obtenus.

2. Calculer $P(\text{MA})$.

3. Calculer $P(\text{A})$.

4. En déduire $P(\text{E})$.