09 : Fonctions linéaires et affines

I. Notion de fonction affine

Activité préparatoire

Pour entrer dans un stade, 3 tarifs sont proposés :

- **Tarif 1** : 8 € l'entrée.
- **Tarif 2** : 4 € l'entrée avec la carte demi-tarif qui coûte 40 €.
- **Tarif 3** : L'abonnement pour la saison qui coûte 92 €.

1. Calculer pour chaque tarif, la dépense pour 6 entrées, 11 entrées et enfin 15 entrées. Indiquer dans chaque cas le tarif le plus intéressant.
2. Soit *x* le nombre d'entrées. Exprimer en fonction de *x*, la dépense pour la saison pour chaque tarif. On appelle $f(x)$ la dépense pour le tarif 1, $g(x)$ la dépense pour le tarif 2 et $h(x)$ la dépense pour le tarif 3.
3. Calculer le prix dépensé pour 18 entrées pour chacun des tarifs.
4. Représenter sur un même graphique, la dépense en fonction du nombre d'entrées de chacun des tarifs.
5. En utilisant le graphique, dans quels cas les tarifs sont plus intéressants ?

1. Définition

a et *b* désignent deux nombres relatifs.
Une **fonction affine** *f* est une fonction qui, à un nombre *x* associe le nombre $ax+b$.
On note $f : x \mapsto ax+b$.

Exemple

La fonction *f* qui à un nombre *x* fait correspondre le nombre $-4x+7$ est une fonction affine.
On note $f : x \mapsto -4x+7$. Ainsi on a $f(x) = -4x+7$.

Remarques

On considère la fonction affine $f : x \mapsto ax+b$.

- Le nombre $ax+b$ est l'image du nombre *x* par la fonction affine *f*. On note $f(x) = ax+b$.
- Calculer le nombre $f(x)$ revient à « multiplier le nombre *x* par *a*, puis ajouter *b* ».
- $f(0) = a \times 0 + b = b$. Le nombre *b* est l'image de 0 par la fonction *f*.

Cas particuliers

On considère la fonction affine $f : x \mapsto ax+b$.

- Lorsque $b = 0$, la fonction *f* est la **fonction linéaire** de coefficient *a*.
- Lorsque $a = 0$, la fonction *f* est la **fonction constante** égale à *b*.

2. Propriété

Si une fonction *f* est affine et n'est pas constante, alors tout nombre admet un unique antécédent par la fonction *f*.

Exemple

On veut trouver l'antécédent du nombre -11 par la fonction affine $f : x \mapsto 5x+4$.
Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = -11$, cad $5x+4=-11$.
Cette équation admet pour unique solution -3.
-3 est donc l'antécédent du nombre -11 par la fonction affine non constante *f*.

Remarque

On considère la fonction affine constante *g* telle que $g(x)=7$.

- Le nombre 7 admet une infinité d'antécédents par la fonction *g* : tous les nombres.
- Le nombre 2 n'admet aucun antécédent par la fonction *g*.

Exercice 1

On considère les fonctions *g* et *h* telles que : $g : x \mapsto \frac{x}{5}+2$ et $h : x \mapsto \frac{6}{5}x$.

1. Justifier que ces fonctions sont affines. Préciser leurs coefficients.
2. Calculer l'image du nombre -15 par les fonctions *g* et *h*.
3. Déterminer l'antécédent du nombre 0 par les fonctions *g* et *h*.

II. Représentation graphique

a et *b* désignent deux nombres relatifs. On considère la fonction affine $f : x \mapsto ax+b$.

1. Propriété

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction affine *f* est une droite.

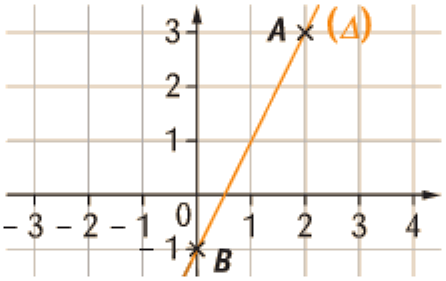
Exemple

On considère la fonction affine $g : x \mapsto 2x-1$.
On a $g(0) = 2\times 0 - 1 = -1$ et
$g(2) = 2\times 2 - 1 = 3$.

On peut résumer les résultats dans tableau :

x	0	2
$g(x)$	-1	3

Donc la représentation graphique de la fonction *g* est la droite (Δ) qui passe par les points $A(2;3)$ et $B(0;-1)$.



2. Définition

On note (d) la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

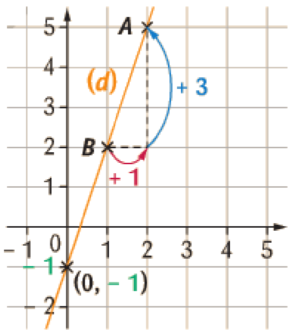
La droite (d) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;b)$.

- Le nombre b est appelé **ordonnée à l'origine** de la droite (d).
- Le nombre a est appelé **coefficient directeur** de la droite (d).

Exemple

La droite (d) ci-dessous est la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto 3x - 1$.

La droite (d) passe par les points $A(2;5)$ et $B(1;2)$.



L'ordonnée à l'origine de la droite (d) est -1 et son coefficient directeur est 3.

3. Propriété

On considère un point M de coordonnées $(x_M ; y_M)$.

La droite (d) est la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

Le point M appartient à la droite (d) si est seulement si, on a l'égalité $ax_M + b = y_M$.

Exemple

On considère la fonction affine $f : x \mapsto 0,6x - 1,5$.

Le point $A(7;2,7)$ appartient à la droite représentant la fonction affine *f*.

En effet $0,6 \times 7 - 1,5 = 4,2 - 1,5 = 2,7$.

Le point $B(3;0,2)$ n'appartient pas à la droite représentant la fonction affine *f*.

En effet $0,6 \times 3 - 1,5 = 1,8 - 1,5 = 0,3 \neq 0,2$.

4. Proportionnalité des accroissements

Propriété

On considère la fonction affine *f* définie par $f(x) = ax + b$.

Pour deux nombres distincts x_1 et x_2 : $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Exercice 2

Soit *f* la fonction affine telle que $f(3) = -2$ et $f(-1) = 4$.

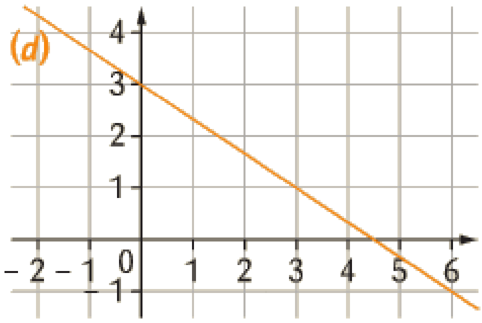
1. Déterminer par le calcul l'expression algébrique de $f(x)$.

2. Le point $A(3;-6)$ appartient-il à la droite représentant la fonction *f* ?

3. Le point $B(-1;3{,}9)$ appartient-il à la droite représentant la fonction *f* ?

Exercice 3

La droite (d) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.



1. Lire le nombre *b* et le nombre *a* sur le graphique.
2. Donner l'expression algébrique de $f(x)$.

3. Déterminer l'abscisse du point *C* intersection de la droite (d) et de l'axe des abscisses.