

03 : Les fractions

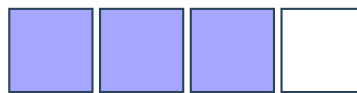
Partie 1 : Notion de fraction

1. Partage

Exemple

Un gâteau est partagé en 4 parts égales.

Si je mange 3 parts sur 4, je mange les trois quarts du gâteau : $\frac{3}{4}$.



3 parts mangées sur 4

Définition

Une fraction est un nombre qui s'écrit sous la forme : $\frac{a}{b}$, avec $b \neq 0$.

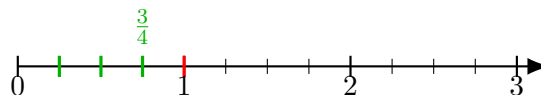
- Le nombre a est appelé le **numérateur**.
- Le nombre b est appelé le **dénominateur**.

2. Demi-droite graduée

Exemple

Une fraction peut être représentée sur une demi-droite graduée.

Pour représenter la fraction $\frac{3}{4}$, on partage l'unité $[0 ; 1]$ en 4 parts égales, puis on avance de 3 graduations.



Méthode : Placer une fraction sur une demi-droite graduée

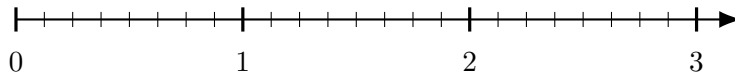
Pour placer une fraction $\frac{a}{b}$:

1. Diviser l'unité en b parts égales ;
2. Compter a graduations à partir de 0 afin de repérer le nombre $\frac{a}{b}$.

Application 1

Placer les fractions suivantes sur la droite graduée :

$$\frac{3}{4} ; \frac{8}{4} ; \frac{3}{2} ; \frac{3}{8} ; \frac{9}{8}.$$



3. Forme décimale

Propriété

Une fraction peut être transformée en nombre décimal lorsque la division du numérateur par le dénominateur se termine.

Exemple

La fraction $\frac{5}{4}$ peut s'écrire sous forme décimale :

$$\frac{5}{4} = 5 \div 4 = 1,25.$$

Attention

Certaines fractions ne possèdent pas d'écriture décimale exacte :

$$\frac{1}{3} = 0,333333 \dots$$

On peut cependant donner une valeur approchée :

$$\frac{1}{3} \approx 0,33.$$

Exemple

Tout nombre décimal peut être écrit sous forme fractionnaire :

$$1,7 = \frac{17}{10}, \quad 5,42 = \frac{542}{100}, \quad 6,008 = \frac{6008}{1000}.$$

Remarque

Certaines fractions sont des nombres entiers :

$$\frac{6}{6} = 1, \quad \frac{12}{2} = 6, \quad \frac{21}{3} = 7, \quad \frac{25}{5} = 5.$$

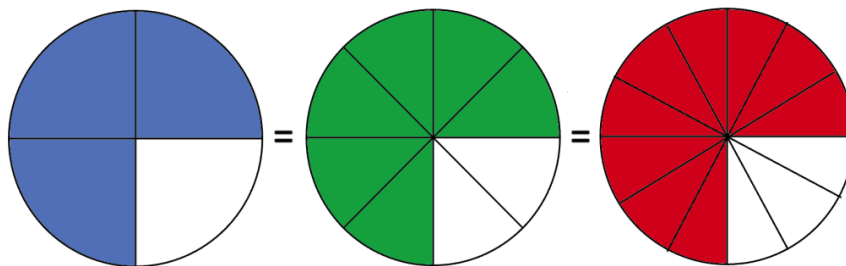
Application 2

Écrire les nombres suivants sous forme fractionnaire :

$$0,6, \quad 2,45, \quad 7,003.$$

Partie 2 : Fractions égales**Exemple**

Les trois surfaces colorées ci-dessous sont égales.



$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

Propriété

On ne change pas la valeur d'une fraction lorsque l'on multiplie ou lorsque l'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad (k \neq 0).$$

De même :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Application 3

Trouver deux fractions égales à chacune des fractions suivantes :

$$\frac{4}{3}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{9}{5}.$$

Attention

Cette règle ne s'applique pas à l'addition et à la soustraction.

$$\frac{2}{5} \neq \frac{2+3}{5+3}.$$

En effet :

$$\frac{2}{5} = 0,4 \quad \text{alors que} \quad \frac{2+3}{5+3} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

Application 4

Compléter les égalités suivantes :

$$\text{a. } \frac{3}{8} = \frac{\dots}{56} \quad \text{b. } \frac{7}{9} = \frac{42}{\dots} \quad \text{c. } \frac{15}{4} = \frac{\dots}{20} \quad \text{d. } \frac{26}{39} = \frac{2}{\dots}$$

Partie 3 : Mettre des fractions au même dénominateur**Méthode**

1. On cherche un dénominateur commun aux deux fractions.
2. On transforme chaque fraction en multipliant son numérateur et son dénominateur par le même nombre.
3. On écrit les deux fractions avec le même dénominateur.

Application 5

Mettre au même dénominateur les couples de fractions suivants :

a. $\frac{2}{5}$ et $\frac{7}{15}$

b. $\frac{5}{6}$ et $\frac{14}{24}$

c. $\frac{3}{7}$ et $\frac{20}{35}$

d. $\frac{5}{6}$ et $\frac{3}{8}$

Partie 4 : Comparer des fractions

1. Comparer deux fractions

Propriété

- Si deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.
- Si deux fractions ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.

Exemple

- Même dénominateur : $\frac{7}{12} > \frac{5}{12}$, car $7 > 5$.
- Même numérateur : $\frac{3}{4} > \frac{3}{7}$, car $4 < 7$.

Propriété

- Si une fractions a le numérateur plus grand que le dénominateur, alors cette fraction est plus grande que 1.
- Si une fractions a le dénominateur plus grand que le numérateur, alors cette fraction est plus petite que 1.

Exemple

- $\frac{7}{4} > 1$, car $7 > 4$.
- $\frac{3}{5} < 1$, car $5 > 3$.

2. Encadrer une fraction par deux entiers consécutifs

Méthode

Pour encadrer une fraction par deux entiers consécutifs, on cherche les multiples du dénominateur qui entourent le numérateur.

Exemple

Encadrer $\frac{23}{6}$ par deux entiers consécutifs.

On cherche les multiples de 6 qui entourent 23 :

$$18 < 23 < 24.$$

On divise par 6 :

$$\frac{18}{6} < \frac{23}{6} < \frac{24}{6}.$$

Donc :

$$3 < \frac{23}{6} < 4$$

Exercice 1

Comparer les fractions suivantes en utilisant $<$ ou $>$.

1. $\frac{5}{9} \dots \frac{8}{9}$

2. $\frac{4}{7} \dots \frac{4}{11}$

3. $\frac{9}{5} \dots 1$

4. $\frac{6}{13} \dots 1$

Exercice 2

Encadrer chaque fraction par deux entiers consécutifs.

1. $\frac{17}{4}$

2. $\frac{29}{7}$

3. $\frac{26}{5}$

4. $\frac{38}{9}$

Partie 5 : Additionner et soustraire des fractions**1. Avec le même dénominateur****Propriété**

Lorsqu'on additionne deux fractions qui ont le même dénominateur, on additionne les numérateurs et on garde le dénominateur :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Lorsqu'on soustrait deux fractions qui ont le même dénominateur, on soustrait les numérateurs et on garde le dénominateur :

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Exemple

- $\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{3+5}{7} = \frac{8}{7}$
- $\frac{11}{4} - \frac{3}{4} = \frac{11-3}{4} = \frac{8}{4} = 2$

2. Avec des dénominateurs différents**Propriété**

On ne peut pas additionner ou soustraire directement deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur.

Il faut d'abord les mettre au même dénominateur.

Exemple

On veut calculer : $\frac{4}{5} + \frac{3}{10}$.

On met les deux fractions au même dénominateur 10 et on calcule :

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} + \frac{3}{10} = \frac{11}{10}.$$

Exemple

On veut calculer : $\frac{7}{4} - \frac{2}{6}$.

Dans la table de 6 on cherche un multiple de 4.

Table de 6 : 6 12 18 24 30

On met les deux fractions au même dénominateur 12 et on calcule :

$$\frac{7}{4} - \frac{2}{6} = \frac{7 \times 3}{4 \times 3} - \frac{2 \times 2}{6 \times 2} = \frac{21}{12} - \frac{4}{12} = \frac{17}{12}.$$

Exercice 3

Calculer et simplifier si possible :

1. $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$

2. $\frac{8}{5} - \frac{3}{5}$

3. $\frac{2}{3} + \frac{5}{9}$

4. $\frac{7}{6} - \frac{1}{4}$

5. $\frac{5}{8} + \frac{3}{4}$

6. $\frac{11}{10} - \frac{2}{5}$

7. $\frac{4}{9} + \frac{2}{3} - \frac{1}{9}$

8. $\frac{5}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$