

Feuille d'exercices

Polynômes du troisième degré

Objectifs

Cette feuille a pour objectif de s'entraîner à :

- trouver une racine évidente d'un polynôme du troisième degré ;
- factoriser le polynôme à l'aide de cette racine ;
- déterminer les coefficients d'un polynôme du second degré ;
- résoudre une équation du troisième degré.

Rappel

Si a est une racine du polynôme f , alors $f(a) = 0$ et le polynôme $f(x)$ est divisible par $x - a$. Ainsi, il existe deux réels b et c tels que :

$$f(x) = (x - a)(x^2 + bx + c).$$

Exemple

On considère le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 55x + 56.$$

1. Vérification de la racine évidente

On calcule :

$$f(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 55 \times 1 + 56$$

$$f(1) = 1 - 2 - 55 + 56 = 0.$$

Ainsi, 1 est une racine de f . Donc $f(x)$ est divisible par $x - 1$.

2. Identification des coefficients

On cherche trois réels a , b et c tels que :

$$f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

Développons :

$$(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c.$$

Par identification avec :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 55x + 56,$$

on obtient :

$$\begin{cases} a = 1, \\ b - a = -2, \\ c - b = -55, \\ -c = 56. \end{cases}$$

Ainsi :

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -56.$$

On en déduit :

$$f(x) = (x - 1)(x^2 - x - 56).$$

3. Résolution de l'équation $f(x) = 0$

D'après l'identification des coefficients, on a :

$$f(x) = (x - 1)(x^2 - x - 56).$$

Ainsi :

$$f(x) = 0 \iff x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 56 = 0.$$

La première équation donne :

$$x = 1.$$

Pour résoudre l'équation $x^2 - x - 56 = 0$, on calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Ici :

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -56.$$

Donc :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-56) = 1 + 224 = 225.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ainsi :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{225}}{2} = \frac{1 - 15}{2} = -7,$$

et

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{225}}{2} = \frac{1 + 15}{2} = 8.$$

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont donc :

$$\mathcal{S} = \{-7; 1; 8\}.$$

Exercice 1

On considère le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 7x^2 + 4x - 12.$$

1. Montrer que 1 est une racine évidente de f .
2. Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$f(x) = 0.$$

Exercice 2

On considère le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6.$$

1. Trouver une racine évidente de g .
2. Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$g(x) = (x - r)(ax^2 + bx + c),$$

où r désigne la racine trouvée à la question précédente.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$g(x) = 0.$$

Exercice 3

On considère le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12.$$

1. Vérifier que 2 est une racine de h .
2. Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$h(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$h(x) = 0.$$

Exercice 4

On considère le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4.$$

1. Trouver une racine évidente de k .
2. Factoriser $k(x)$ sous la forme :

$$k(x) = (x - r)(ax^2 + bx + c).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$k(x) = 0.$$

Exercice 5

On considère le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$p(x) = -x^3 + 5x^2 + 2x - 8.$$

1. Montrer que 2 est une racine évidente de p .
2. Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$p(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$p(x) = 0.$$

Exercice 6

On considère le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$$

1. Trouver une racine évidente de q .
2. Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$q(x) = (x - r)(ax^2 + bx + c),$$

où r désigne la racine trouvée à la première question.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$q(x) = 0.$$