02 : Nombres dérivés

I. Taux de variation et nombre dérivé

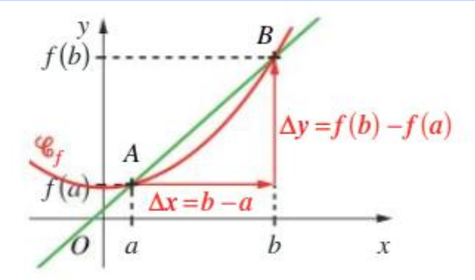
1. Taux de variation d'une fonction entre deux réels

Définition

On considère une fonction f définie sur un Intervalle I.
Soient a et b deux nombres réels distincts appartenant à I.

Le taux de variation (ou taux d'accroissement) de f entre a et b est le nombre réel égal à :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2$

- Le taux de variation de f entre 1 et 3 est :
  $$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^2-1^2}{3-1}=\frac{8}{2}=4$$
- Le taux de variation de f entre 3 et $3+h$ est :
  $$\tau(h)=\frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3}=\frac{(3+h)^2-3^2}{h}=\frac{3^2+2\times3h+h^2-3^2}{h}=\frac{h(6+h)}{h}=6+h$$

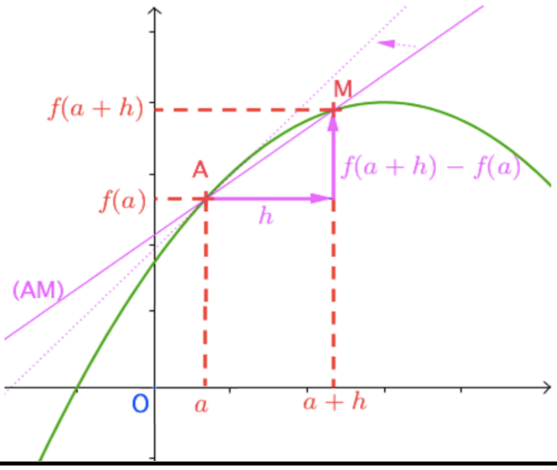
Application

Déterminer le taux d'accroissement de $g: x \mapsto \dfrac{1}{x}$ entre 2 et $2+h$.

Une formule équivalente

Sur la figure ci-dessous, on pose $b = a + h$. Le taux de variation devient alors :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



2. Notion de nombre dérivé

Définition

On considère une fonction *f* définie sur un Intervalle *I*.
Soit *a* un nombre réel de l'intervalle *I* et *h* un réel non nul tel que $a+h\in I$.
On dit que la fonction *f* est dérivable en *a* lorsque le taux de variation de *f* entre les réels *a* et $a+h$ se rapproche d'un nombre réel *L* quand *h* se rapproche de 0.
Le réel *L*, limite du taux de variation lorsque *h* tend vers 0, est appelé nombre dérivé de la fonction *f* en *a*.
On le note $f'(a)$. On écrit :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemple

- Pour $f(x)=x^2$, on a vu q le taux de variation de *f* entre 3 et $3+h$ est $\tau(h)=6+h$.
  Or $\lim_{h\to 0}\tau(h)=\lim_{h\to 0}(6+h)=6$. Donc *f* est dérivable en 3 et $f'(3)=6$.

- Pour $g(x)=\frac{1}{x}$, on a vu que le taux de variation de *g* entre 2 et $2+h$ est
  $\tau(h)=\frac{-1}{2(2+h)}$.
  Or $\lim_{h\to 0}\tau(h)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)}=\frac{-1}{4}$. Donc *g* est dérivable en 2 et $g'(2)=\frac{-1}{4}$

- Pour $h(x)=\sqrt{x}$, le taux de variation de *h* entre 0 et $0+h$ est $\tau(h)=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$.
  Lorsque *h* se rapproche de 0, $\tau(h)$ devient de plus en plus grand, donc ne tend pas vers un nombre. Donc la fonction racine carré n'est pas dérivable en 0.

Exercice 1

Soient les fonctions *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-3x+1$ et g définie sur $]2;+\infty[$ par $g(x)=\frac{3}{x-2}$.

1. a. Soit *h* un réel non nul. Exprimer, en fonction de *h*, le taux de variation de la fonction *f* entre 2 et $2+h$. Dans la suite, on notera $\tau(h)$ ce taux de variation.

b. Déterminer la limite de $\tau(h)$ lorsque *h* tend vers 0.

c. En déduire que la fonction *f* est dérivable en 2 et préciser la valeur de $f'(2)$.

d. Retrouver la valeur de $f'(2)$ à l'aide de la calculatrice.

2. a. Soit h un réel non nul tel que $h > 2$. Montrer que le taux de variation $\tau(h)$ de la fonction g entre 3 et $3+h$ est égal à $\tau(h) = \dfrac{-3}{h+1}$.

b. Montrer alors que la fonction g est dérivable en 3 et préciser la valeur de $g'(3)$.

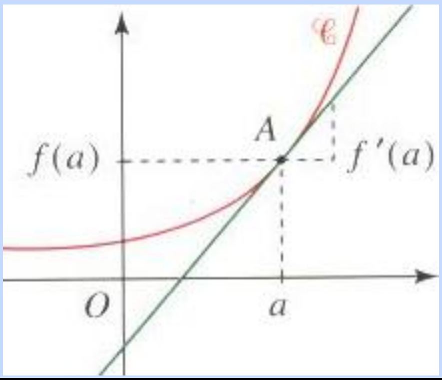
II. Tangente à une courbe en un point

1. Notion de tangente

On considère une fonction f définie sur un intervalle I, a un réel de cet intervalle et C_f la courbe représentative de la fonction f.

Définition

Si f est dérivable en a, on appelle tangente à C_f au point $A(a; f(a))$ la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



2. Équation réduite de la tangente

Propriété

L'équation réduite de la tangente au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a).$$

Démonstration

Notons T la tangente à la courbe C_f en A.

Le coefficient directeur de T étant $f'(a)$, T admet une équation de la forme $y = f'(a)x+b$ où b est un réel que l'on détermine en écrivant que les coordonnées de A vérifient cette équation, c'est-à-dire :

$f(a) = f'(a)a+b$.

On en déduit que $b = f(a)-af'(a)$, d'où l'équation de la tangente au point d'abscisse a :

$y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2$. On veut déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

$$\tau(h) = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h$$

$\lim\limits_{h \to 0}(2+h) = 2$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

$f(1) = 1^2 = 1$.

Donc l'équation de la tangente est :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = 2(x-1) + 1$

$y = 2x - 1$

Exercice 2

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$ et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe au point d'abscisse -2.

2. Déterminer la position relative entre C_f et T.