02 : Produit scalaire

I. Produit scalaire

1. Norme d'un vecteur

Définition

On donne un vecteur $\vec{u}$ du plan et deux points *A* et *B* tels $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance *AB*.

Propriété

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, alors

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Exemple

On donne $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $A(4;-5)$ et $B(7;-1)$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$AB = \sqrt{(7-4)^2+(-1+5)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Exercice 1

Dans un repère orthonormé (O,I,J) on donne $A(-1;-1)$, $B(-2;3)$ et $C(3;0)$.
1. Calculer *AB*, *AC* et *BC*.
2. Quelle est la nature de triangle *ABC*.

2. Définition du produit scalaire

Définition

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel, noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini de la manière suivante :

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$.

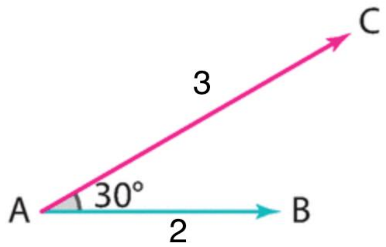
En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

Remarque

$\vec{u}.\vec{v}$ se lit : « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »

Exemple

On donne $AB=2$, $AC=3$ et $\widehat{ABC}=30°$.



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=2\times3\times\cos(30)=3\sqrt{3}$$

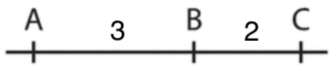
Cas particulier des vecteurs colinéaires

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires non nuls, alors :

$$\vec{u}.\vec{v}=\begin{cases}\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens}\\ -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraire}\end{cases}$$

Exemple

Les points *A*, *B* et *C* sont alignés tels que $AB=3$ et $BC=2$.



On a alors :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC=3\times5=15$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-BA\times BC=-3\times2=6$

Propriété

Le produit scalaire est symétrique.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

3. Projection orthogonale et produit scalaire

Propriété

Pour tous points *A*, *B* et *C* distincts du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\begin{cases}AB\times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens}\\ -AB\times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraire}\end{cases}$$

Où *H* est le projeté orthogonal de *C* sur la droite (AB).

Démonstration

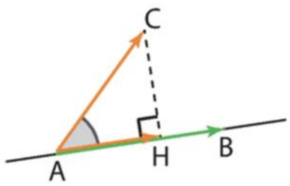
On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(BAC\right)$

H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(BAC\right)$

2 cas se présentent :

1er cas : *AB* et *AH* sont dans le même sens



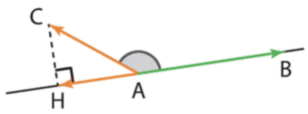
$\cos\left(BAC\right) = \cos\left(HAC\right)$

Or $\cos\left(HAC\right) = \dfrac{AH}{AC}$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \dfrac{AH}{AC}$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$

1er cas : *AB* et *AH* sont de sens contraire



$\cos\left(BAC\right) = \cos\left(180 - HAC\right) = -\cos\left(HAC\right)$

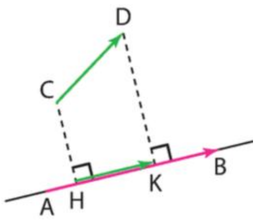
Or $\cos\left(HAC\right) = \dfrac{AH}{AC}$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \left(-\dfrac{AH}{AC}\right)$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

Remarques

- 2 angles supplémentaires (somme égale à 180°) ont des cosinus opposés
- Dans le cas général, pour calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, on peut projeter les points C et D sur la droite (AB). On a alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HK}$



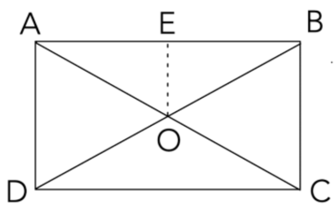
On peut aussi projeter les points A et B sur la droite (CD).

Exercice 2

On considère un rectangle $ABCD$ de centre O tel que $AB = 6$ et AD = 4.
Calculer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ **2.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ **3.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$

4. $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{BC}$ **5.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$ **6.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$



4. Orthogonalité

Définition

On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$, sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$

Exercice 3

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB=3$ et $BC=4$.
O est le milieu de $[BC]$.

1. Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.
2. I est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Calculer BI.

Exercice 4

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB=4$, $AD=5$ et $BAD=\frac{\pi}{3}$.

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{DC}$.

Exercice 5

1. On donne $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=5$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{3}$. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$.

2. On donne $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=7$. Calculer l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.

II. Propriété du produit scalaire

1. Produit scalaire et normes

Propriété : Formules de polarisation

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v}&=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]\end{aligned}$$

Exemple

Soit un triangle ABC tel que $AB=2$, $AC=5$ et $BC=4$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left[\left\|\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right]$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left[AC^2-AB^2-BC^2\right]$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left[5^2-2^2-4^2\right]=\frac{5}{2}$$

Remarque

Si les vecteurs ont la même origine, on utilise la formule avec la soustraction.

Exercice 6

Soit ABC un triangle tel que $AB=3$, $AC=5$ et $BC=6$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ au degré près.

2. Produit scalaire en repère orthonormé

Propriété

Dans un repère orthonormé, pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, on a :

$$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$$

Exercice 7

Dans un repère orthonormé (O,I,J) on donne $A(1;-3)$, $B(-2;-1)$ et $C(5;1)$.

1. Calculer AB^2, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2. Que remarque-t-on ?

Exercice 8

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1;0)$, $B(-2;-7)$, $C(12;-9)$ et $D(-9;-6)$.

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 9

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2;3)$, $B(-1;-2)$ et $C(-3;4)$.

1. Calculer AB, AC et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondi au dixième de degré près.

3. Bilinéarité du produit scalaire et conséquences

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel k on a :

$\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ $\qquad$ $\vec{u}.\left(k\vec{v}\right)=k\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$

Définition

Le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même est appelé carré scalaire de $\vec{u}$, noté $\vec{u}^{\,2}$.
On a $\vec{u}^{\,2}=\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.
De même, $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB^2$.

Propriété

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^{\,2}+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^{\,2}$ $\qquad$ $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^{\,2}-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^{\,2}$ $\qquad$ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^{\,2}-\vec{v}^{\,2}$

Exercice 8

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB=4$, $AD=3$ et $BAD=60°$.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et AC.

Réponses

Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB^2+AB\times AD\times\cos\left(BAD\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4^2+4\times3\times\frac{1}{2}=22$

Calculons de AC.

$AC^2=\overrightarrow{AC}^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)^2$

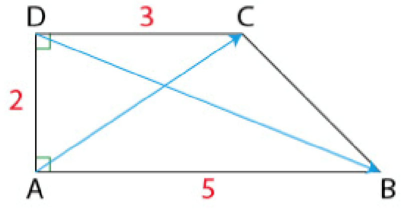
$AC^2=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$

$AC^2=4^2+2\times4\times3\times\frac{1}{2}+3^2=37$

Donc $AC=\sqrt{37}$

Exercice 9

$ABCD$ est le trapèze rectangle ci-dessous tel que : $AB=5$, $AD=2$ et $CD=3$.



Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.

Exercice 10

On considère un triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 5$ et $BAC = 30°$

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ d'une autre manière, déterminer la longueur AH.

3. En remarquant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, calculer $\overrightarrow{BC}^2$ puis la longueur BC.

4. En notant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

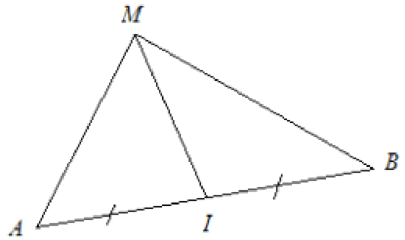
III. Calcul de longueurs et d'angles

1. Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Propriété

Soit A et B deux points du plan, et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$



Démonstration

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{MI}.\left(\underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}}_{\vec{0}}\right) + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right).\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$ car I le milieu du segment $[AB]$.

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Propriété

Soient deux points distincts A et B du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{4}AB^2 \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB.$$

M est un point du cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 11

Soit A et B deux points tels que $AB = 6$.
Chercher l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$:
Pour $k = 0$ Pour $k = 7$ Pour $k = -9$ Pour $k = -12$

2. Formules d'Al-Kashi

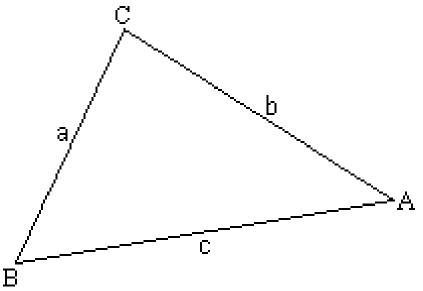
Propriété

Soit ABC un triangle. On pose $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$. On a alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos \mathrm{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos \mathrm{C}$$



Démonstration

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + AB^2$$

$$a^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos BAC$$

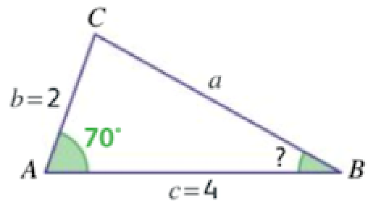
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$$

Remarque

Ce théorème permet de calculer les angles dans un triangle quand on connaît les trois côtés.

Exemple

Soit ABC tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $BAC = 70°$



Calculons BC

$BC^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos BAC$
$BC^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4\cos 70$
$BC \simeq 3,8$

Calculons B

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $B \simeq 29,5°$

Exercice 12

Soit IJK un triangle tel que $IJ = 5\,\text{cm}$, $JK = 6\,\text{cm}$ et $IK = 8\,\text{cm}$.
Calculer les angles du triangle IJK. On arrondira les résultats à 10^{-2} près.

Exercice 13

ABC est un triangle tel que : $AB = 5$, $AC = 7$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 25$.

1. Calculer l'angle A. En déduire BC.

2. En déduire la mesure des angles B et C. On arrondira au dixième de degré.