03 – Suites numériques – Généralités
Feuille d'exercices supplémentaires

Exercice 1

Calculer les cinq premiers termes de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = 3n^2 - 5n + 2$ pour $n \geqslant 0$

2. $v_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$ pour $n \geqslant 0$

3. $w_n = (-1)^n \times (n+2)$ pour $n \geqslant 0$

4. $t_n = \sqrt{n+4} - 1$ pour $n \geqslant 0$

5. $a_n = \dfrac{n^2-4}{n-2}$ pour $n \geqslant 3$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{2n-3}{n+1}$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_5.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

3. Le nombre $\dfrac{1}{2}$ est-il un terme de la suite (u_n) ?

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n - 3$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$.

- **a.** Calculer v_0, v_1 et v_2.
- **b.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n$.

3. Soit (t_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = 7 \times 2^n$.

- **a.** Montrer que $v_0 = t_0$.
- **b.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = 2t_n$.

4. En déduire que $v_n = t_n$ pour tout entier naturel n, puis exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 4

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes, définies pour tout entier naturel n :

1. $u_n = n^2 - 6n + 1$

2. $v_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$

3. $w_n = 5 - 2n$

4. $t_n = \dfrac{2^n}{n+1}$

5. $a_n = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

4. Soit (t_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = (n+1)^2$.

- **a.** Montrer que $u_0 = t_0$.
- **b.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = t_n + 2n + 3$.

5. En déduire que $u_n = t_n$ pour tout entier naturel n, puis calculer u_{20}.

Exercice 6

Un capital de 2 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %. On note C_n le capital disponible au bout de n années, avec $C_0 = 2\,000$.

1. Calculer C_1 et C_2.

2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.

3. En déduire l'expression de C_n en fonction de n.

4.

- **a.** Quel sera le capital au bout de 10 ans ?
- **b.** Au bout de combien d'années le capital aura-t-il doublé ?

Exercice 7

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_0 = 1, \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + u_n}{3}$$

1. Calculer les trois premiers termes de chaque suite.

2. On admet que les termes u_n et v_n sont strictement positifs pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont strictement croissantes.

Exercice 8

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 0 \ ; \ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer les quatre premiers termes de chaque suite.

2. Quelle conjecture peut-on faire à propos des suites (u_n) et (v_n) ? À propos d'une éventuelle limite ?

3. Simplifier l'expression $A(n) = v_{n+1} \times (2 - v_n)$.

4. Justifier que les deux suites (u_n) et (v_n) sont égales.

Exercice 9

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n la somme des n premiers carrés, c'est-à-dire :

$$u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).

2. Déterminer une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.

3. On pose (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$w_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a. Montrer que $u_1 = w_1$.

b. Vérifier que la suite (w_n) vérifie la même relation de récurrence que (u_n). Conclure.