05 : Fonctions dérivées

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{5x^2}{2}+3x-1$

2. $f(x)=\frac{x^4+6x^2-5}{4}$

3. $f(x)=-\frac{3}{5}x^5-\sqrt{2}x^3+\left(5-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{3}$

4. $f(x)=(3x+5)^2$

5. $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}$

6. $f(x)=x^3-3\sqrt{x}+\frac{2}{x}$

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\left(x^2+1\right)(3x-5)$

2. $f(x)=(3x-2)^2$

3. $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$

4. $f(x)=x^3\left(x^2-1\right)$

Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\frac{1}{3x-5}$

2. $f(x)=\frac{-5}{x^2+1}$

3. $f(x)=\frac{3x+1}{2x-3}$

4. $f(x)=\frac{x^2-3x}{x+1}$

5. $f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x^2+x+1}$

6. $f(x)=2x+1-\frac{1}{2x+1}$

Exercice 4

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\sqrt{4x-1}$

2. $f(x)=\sqrt{x^2+2x-1}$

Exercice 5

Les fonctions *f* et *g* sont définies sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f(x)=\frac{5x+7}{x+1}$ et $g(x)=5+\frac{2}{x+1}$.

1. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions *f* et *g*. Que remarque-t-on ?

2. Calculer $f(x)-g(x)$. Pouvait-on prévoir la remarque de la question **1.** ?

Exercice 6

Pour les fonctions suivantes, déterminer la dérivée $f'(x)$, étudier le signe de $f'(x)$ puis construire le tableau de variations de *f* sur *I*.

1. $f(x)=x^2-3x+1$ sur $I=\mathbb{R}$

2. $f(x)=2x^3+9x^2-60x+11$ sur $I=\mathbb{R}$

3. $f(x)=x^4-2x^2-1$ sur $I=\mathbb{R}$

4. $f(x)=\dfrac{3x-1}{2-x}$ sur $I=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

5. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ sur $I=\mathbb{R}$

6. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}$ sur $I=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$

Exercice 7

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+x-2$, et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation de la tangente *T* à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

2. Montrer que pour tout réel *x*, on a $f(x)-(2x-3)=(x-1)^2(x+1)$.

3. En déduire la position relative entre C_f et *T*.

Exercice 8

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-6x+1$ et C_f sa courbe représentative.

1. a. Résoudre l'équation $f'(x)=0$.

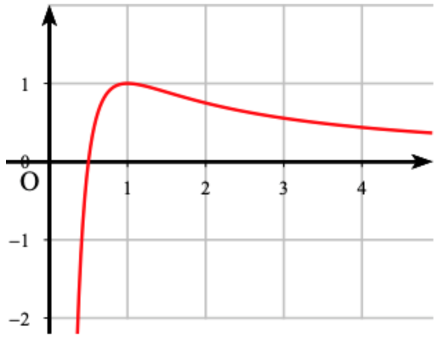
b. Interpréter géométriquement le résultat.

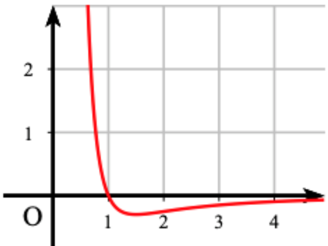
2. Déterminer les abscisses des points de C_f en lesquels la tangente à C_f est parallèle à la droite *D* d'équation $y=-4x+1$.

Exercice 9

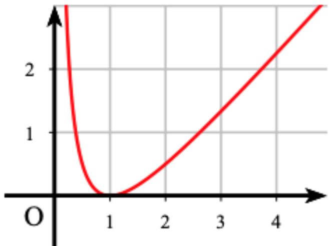
La figure ci-contre est la représentation graphique C_f d'une fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$.

Parmi les trois courbes ci-dessous, quelle est celle qui est susceptible de représenter la fonction dérivée f' de f. On justifiera la réponse.

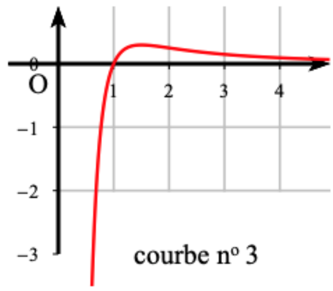




courbe n° 1



courbe n° 2

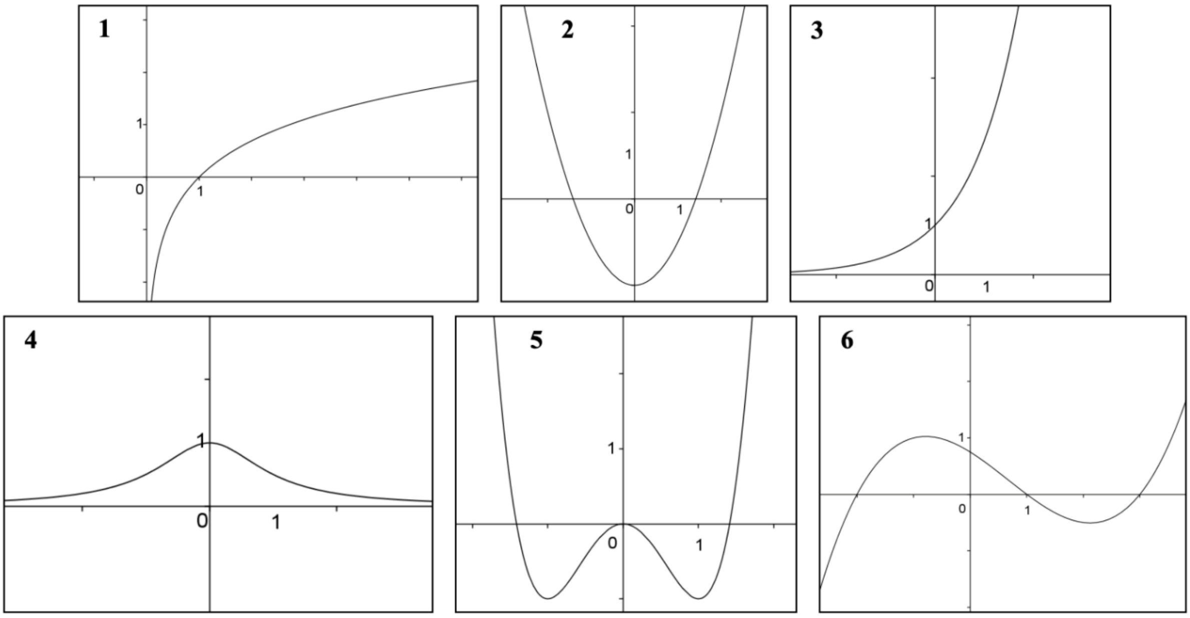


courbe n° 3

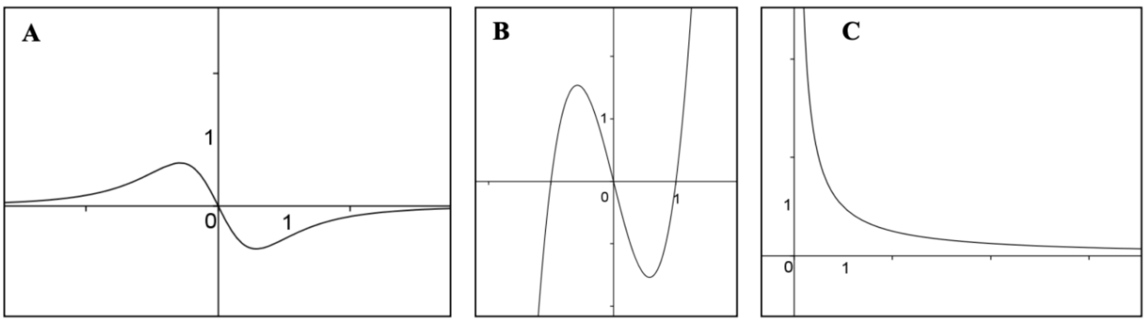
Exercice 10

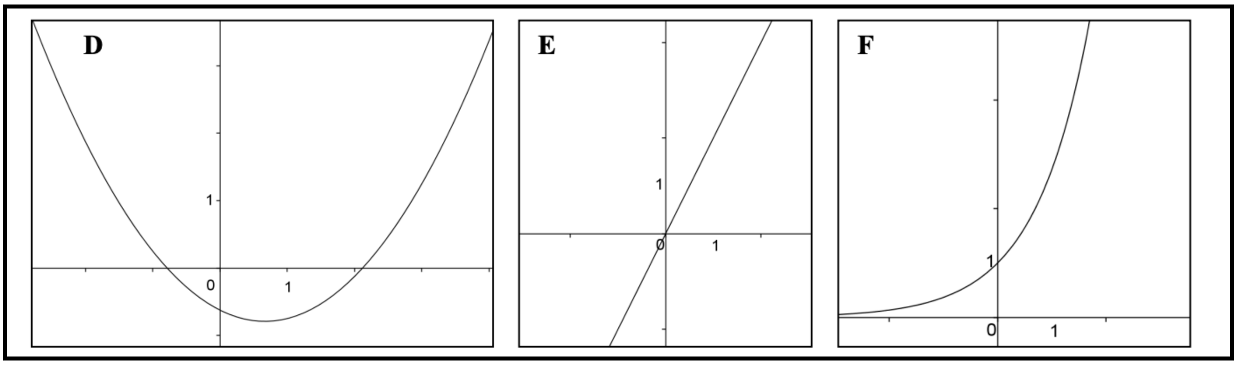
Associer la courbe représentative d'une fonction à celle de sa dérivée.
On justifiera les réponses.

Courbes représentatives des fonctions



Courbes représentatives des fonctions dérivées





Exercice 11

Dans l'impression d'un livre, on doit respecter sur chaque page des marges :

- De 2 cm à gauche et à droite.
- De 3 cm en haut et en bas.

On désigne par x la mesure en cm de la largeur d'une page entière et par y la mesure en cm de sa hauteur.

1. L'aire totale d'une page étant de $600\ \text{cm}^2$, exprimer la hauteur y en fonction de la largeur x.

2. Déterminer l'aire A, en cm^2, de la surface imprimable d'une page en fonction de x et y.

3. Montrer que l'aire A de la surface imprimable s'exprime, en fonction de x, par :

$$A(x) = 624 - 6x - \frac{2400}{x}$$

4. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 624 - 6x - \frac{2400}{x}$.

a. Déterminer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. Établir le tableau de variation de la fonction f.

5. Quelles doivent être les dimensions d'une page pour obtenir une surface imprimable maximale ?

Exercice 12

1. Soit f la fonction définie $[0;10]$ par $f(x) = -x^2 + 10x$.

Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations sur $[0;10]$.

2. Soit x et y deux nombres tels que $x + y = 10$.
On cherche à déterminer pour quelle valeur de x et y leur produit $P = x.y$ est maximal.
a. Exprimer y puis P en fonction de x.

b. Quels sont alors les réels x et y de somme 10 et de produit maximal ?