06 : Trigonométrie

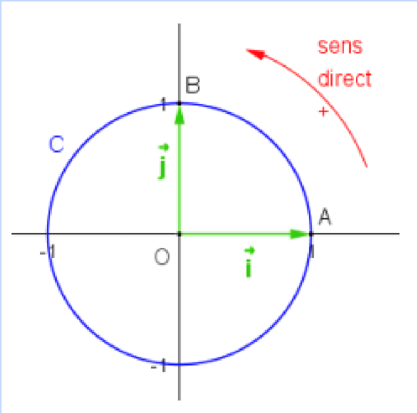
I. Cercle trigonométrique et radian

1. Le cercle trigonométrique

Définition

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre 0 et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens direct ou positif), muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On dit alors que le plan est orienté.



2. Le radian

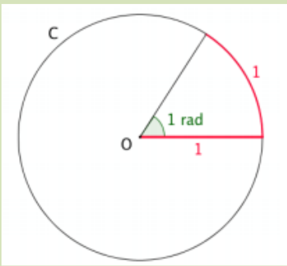
Définition

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.
En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$.

Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π.
On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

Propriété

On appelle radian, noté rad, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



3. Correspondance degrés et radians

Propriété

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°.
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Application 1

1. Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 44°.

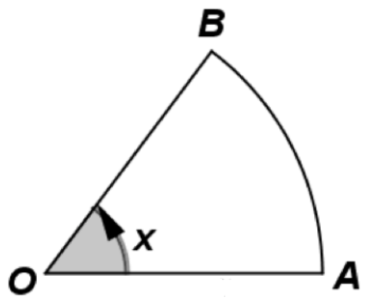
2. Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\dfrac{3\pi}{8}$ rad.

II. Mesure d'un angle orienté

1. Exemples

Exemple 1

Soient A et B deux points du cercle trigonométrique tels que l'angle AOB mesure x radians.

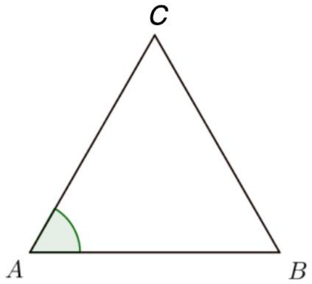


Lorsqu'on parcourt cet angle dans le sens direct, on dit que l'on a un angle orienté noté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$, de mesure x (mesure exprimée en radians).

L'angle orienté parcouru dans l'autre sens, $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$ est de mesure opposée.

Exemple 2

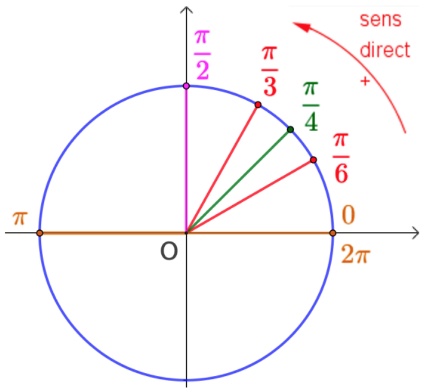
Dans le triangle équilatéral ABC ci-dessous, l'angle géométrique BAC vaut $60° = \frac{\pi}{3}$ rad.



- Une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$;
- Une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{3}$

Exemple 3

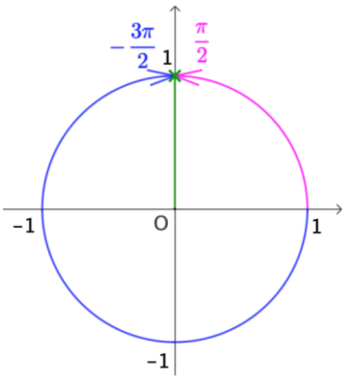
On a représenté ci-dessous des mesures remarquables sur le cercle trigonométrique.



Par exemple, $\frac{\pi}{2}$ correspond à l'angle droit, soit 90°.

Mais il est possible de faire la lecture dans l'autre sens (le sens négatif ou indirect), ce qui donne $-\frac{3\pi}{2}$.

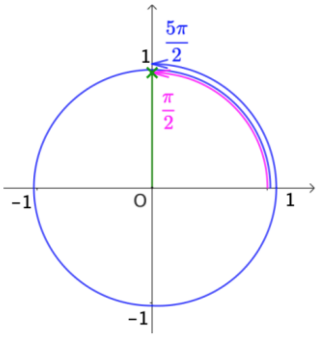
Les mesures $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ sont donc associées à un même point sur le cercle.



Comme la lecture s'effectue sur un cercle, il est également possible de faire plusieurs fois le tour.

Cela donne par exemple $\frac{5\pi}{2}$ en effectuant un tour supplémentaire.

Les mesures $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$ sont également associées au même point sur le cercle.



Application 2

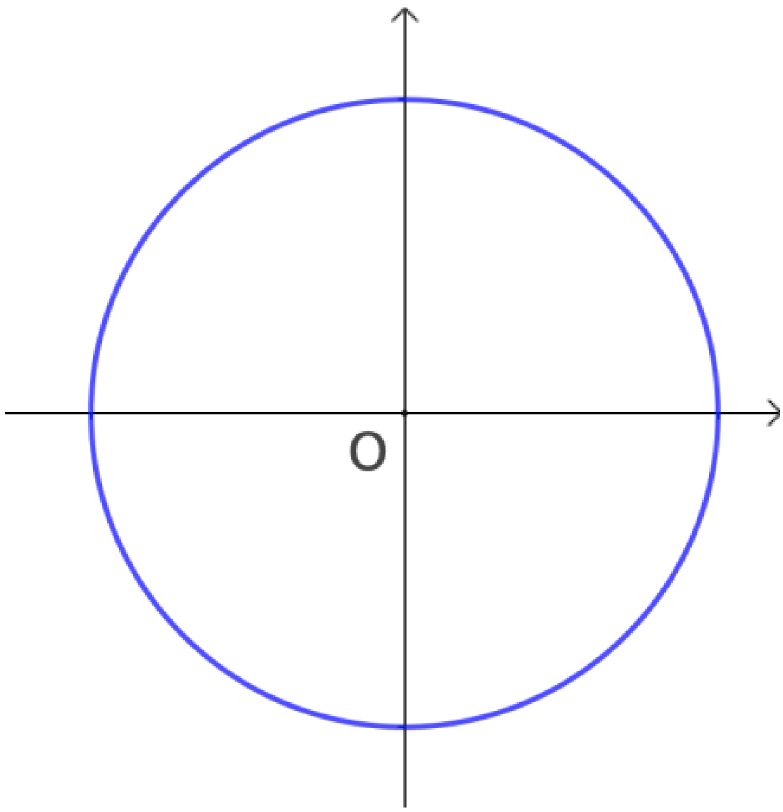
Placer sur le cercle trigonométrique :

Le point A associé au nombre $\frac{3\pi}{4}$

Le point B associé au nombre $\frac{9\pi}{4}$

Le point C associé au nombre $\frac{8\pi}{3}$

Le point D associé au nombre $\frac{-9\pi}{2}$



2. Mesure principale d'un angle orienté

Définition

On a vu qu'un angle possède plusieurs mesures.
La mesure principale d'un angle orienté est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Remarques

- Si θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$ alors tout angle de la forme $\theta+k\times 2\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$, est une mesure de l'angle $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$.
- On dit que l'angle $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$ est égal à θ modulo 2π.

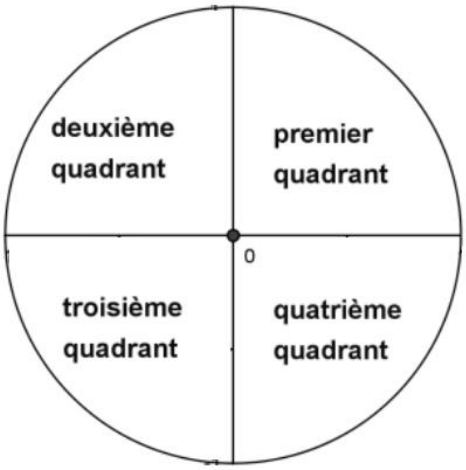
Application 3

1. Donner la mesure principale de l'angle $\dfrac{205\pi}{3}$.

2. Donner la mesure principale de l'angle $-\dfrac{107\pi}{4}$.

3. Quadrants du cercle trigonométrique

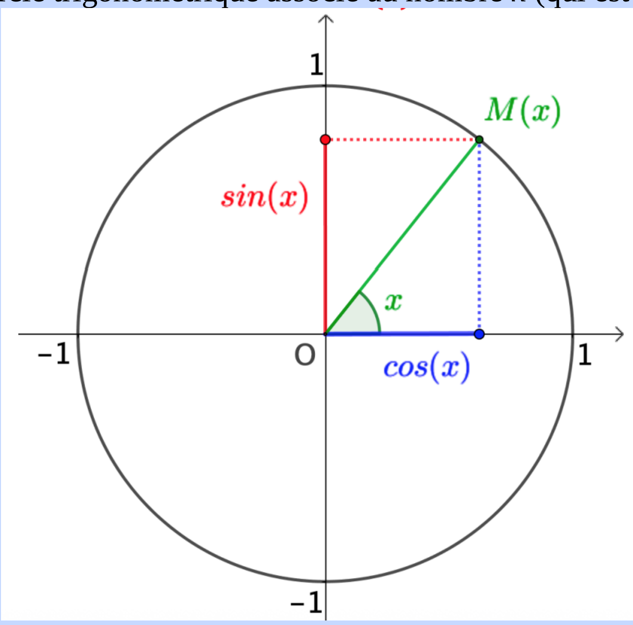
Le cercle trigonométrique se découpe en quatre quadrants.
Soit x la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$.
Pour savoir dans quel quadrant se trouve le point M on a :



III. Les fonctions cosinus et sinus

Définition

Soit M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x (qui est un angle orienté).



- Le cosinus de x est l'abscisse de M et on note $\cos(x)$
- Le sinus de x est l'ordonnée de M et on note $\sin(x)$

Propriété

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x+2k\pi) = \cos x$
- $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ où k entier relatif.
  On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .
- $\cos(-x) = \cos x$. On dit que la fonction cosinus est paire.
- $\sin(-x) = -\sin x$. On dit que la fonction cosinus est impaire.

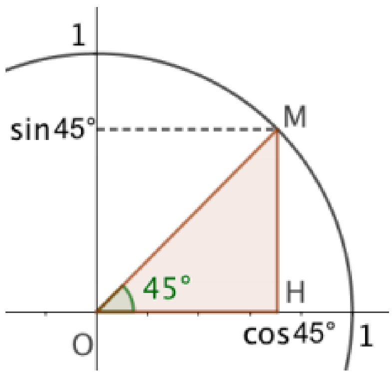
Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

<u>Démonstrations au programme</u>

Démontrons que : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La mesure $\frac{\pi}{4}$ radian est à égale à la mesure 45°.



Le triangle OHM est rectangle est isocèle en H, en effet l'angle OMH est égal à : $180-90-45=45°$. Donc $HO = HM$ et donc : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

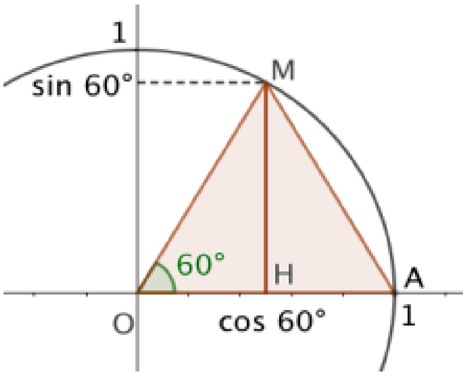
Or, $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Soit : $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ donc on a $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Démontrons que : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$



La mesure $\frac{\pi}{3}$ radian est à égale à la mesure 60°.
Le triangle *OMA* est isocèle en *O*, en effet $OA=OM$.
Donc les angles OMA et OAM sont égaux à

$\frac{180-60}{2}=60°$. Donc le triangle *OMA* est équilatéral.
Ainsi la hauteur *MH* est aussi une médian. Elle coupe $[OA]$ en son milieu *H*.
On a donc donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

De plus, $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$

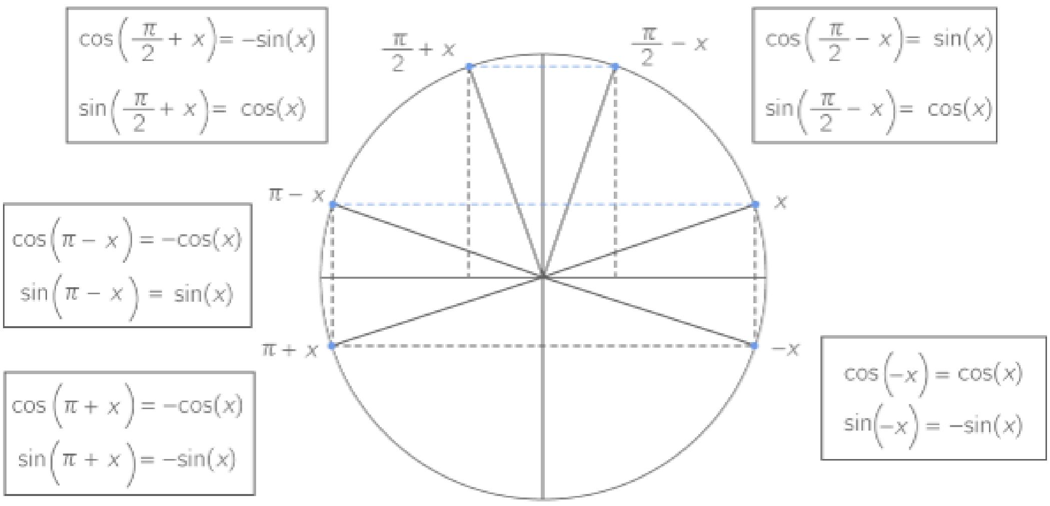
Soit : $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\frac{1}{4}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, donc $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$ et ainsi $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cosinus et sinus d'angles associés

- $-1\le\cos x\le1$ et $-1\le\sin x\le1$
- $\cos^2 x+\sin^2 x=1$
- $\cos(x+2k\pi)=\cos x$
- $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ où k entier relatif.

  On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .
- $\cos(-x)=\cos x$. On dit que la fonction cosinus est paire.
- $\sin(-x)=-\sin x$. On dit que la fonction cosinus est impaire.

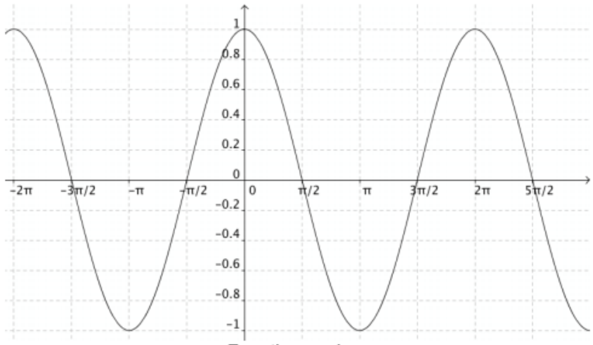


Application 4

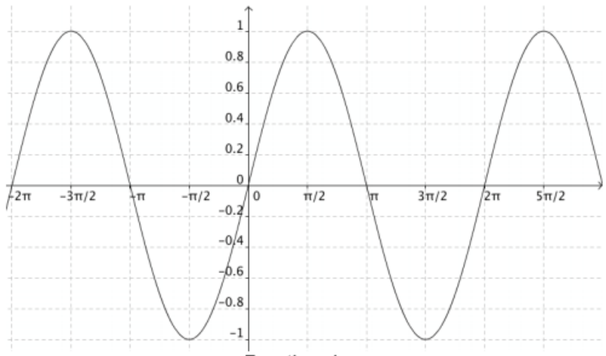
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **2.** $\sin x=-\frac{1}{2}$

Représentations graphiques



Fonction cosinus



Fonction sinus

- On constate que la courbe représentant la fonction cosinus est bien symétrique par rapport à l'axe des ordonnées puisque la fonction cosinus est paire.
- De même la courbe représentant la fonction cosinus est bien symétrique par rapport à l'axe des ordonnées puisque la fonction cosinus est paire.

Application 5

Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x) + x}{x^2 + 1}$ est impaire.