

2. Définition du produit scalaire

Définition

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini de la manière suivante :

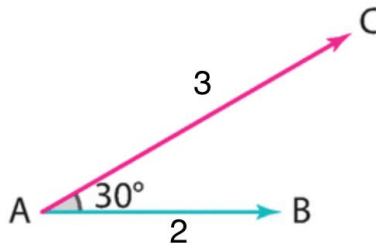
- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(BAC)$.

Remarque : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit : « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »

Exemple

On donne $AB = 2$, $AC = 3$ et $ABC = 30^\circ$.

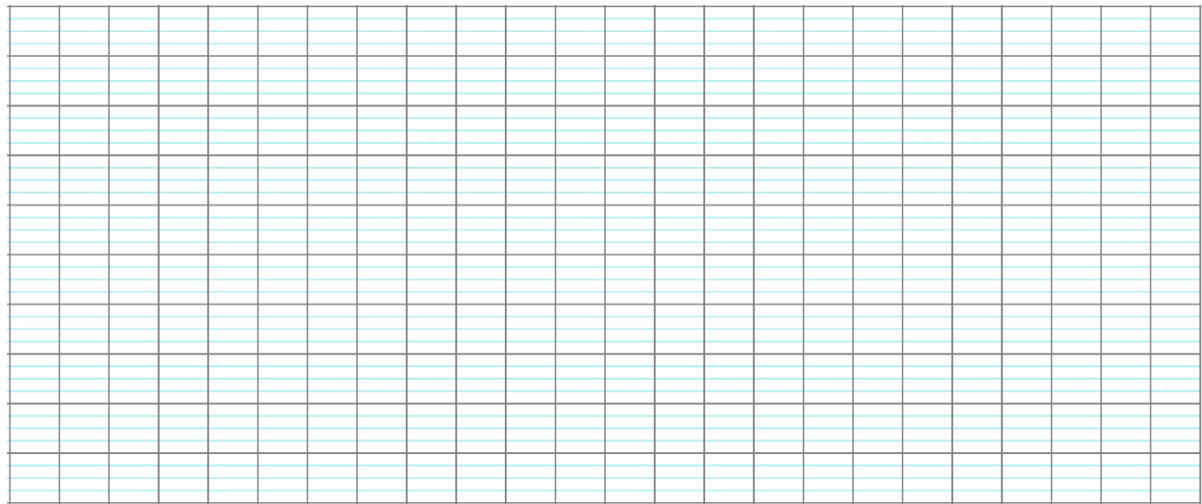


$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(BAC) = 2 \times 3 \times \cos(30) = 3\sqrt{3}$$

Application 2

1. On donne $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. On donne $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$. Calculer l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.



3. Cas particulier : Vecteurs colinéaires

Propriété

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires non nuls, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Exemple

Les points A , B et C sont alignés tels que $AB = 3$ et $BC = 2$.



On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC = 3 \times 5 = 15$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \times BC = -3 \times 2 = 6$$

Propriété

Le produit scalaire est symétrique.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

4. Projection orthogonale et produit scalaire

Propriété

Pour tous points A , B et C distincts du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) .

Démonstration

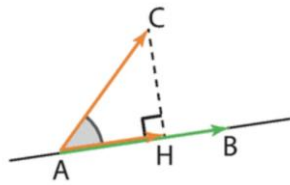
$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) .

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

2 cas se présentent :

1^{er} cas : AB et AH sont dans le même sens | **2^{ème} cas : AB et AH sont de sens contraire**

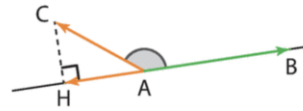


$$\cos(BAC) = \cos(HAC)$$

$$\text{Or } \cos(HAC) = \frac{AH}{AC}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \frac{AH}{AC}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$



$$\cos(BAC) = \cos(180 - HAC) = -\cos(HAC)$$

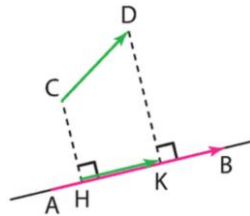
$$\text{Or } \cos(HAC) = \frac{AH}{AC}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \left(-\frac{AH}{AC}\right)$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

Remarques

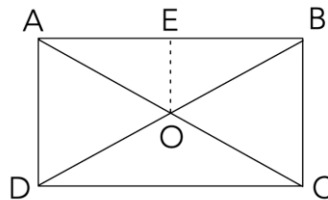
- 2 angles supplémentaires (somme égale à 180°) ont des cosinus opposés.
 $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- Dans le cas général, pour calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, on peut projeter les points C et D sur la droite (AB). On a alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK}$



On peut aussi projeter les points A et B sur la droite (CD).

Application 3

On considère un rectangle ABCD de centre O tel que $AB = 6$ et $AD = 4$.
Calculer les produits scalaires suivants.



1. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$

2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$

4. $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{BC}$

5. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$

6. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$



4. Orthogonalité

Définition

On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

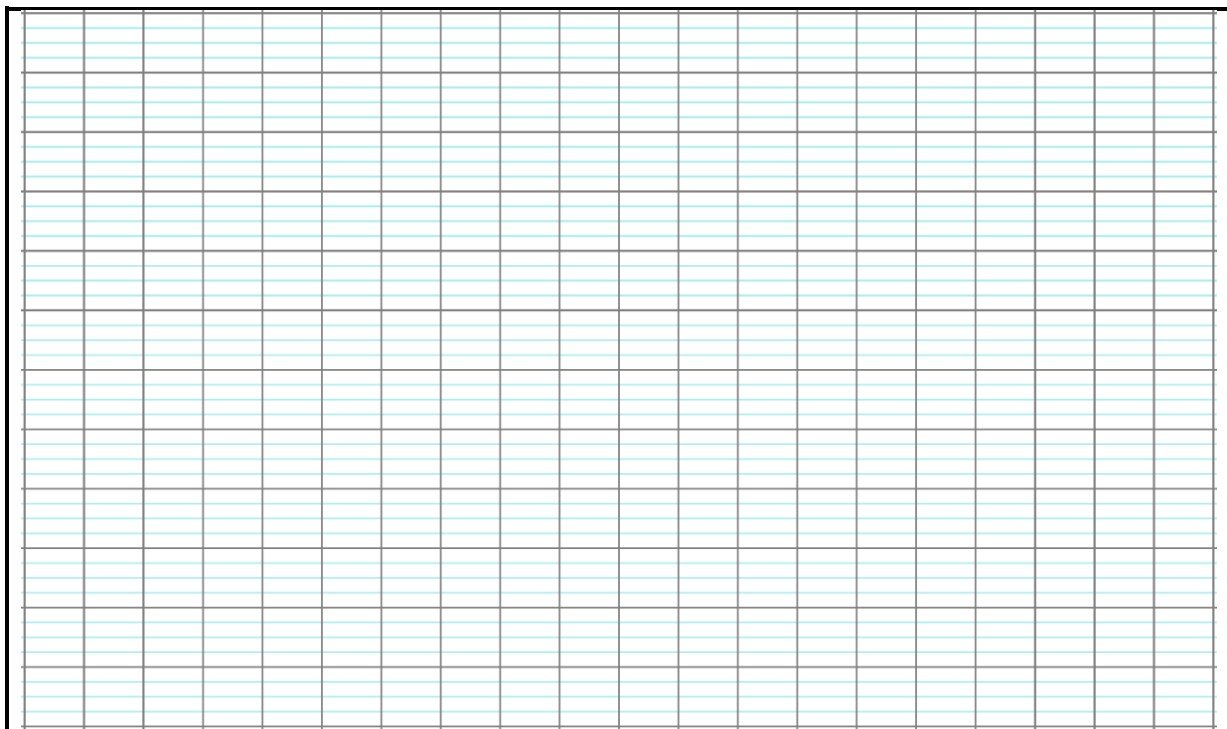
Application 4

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = 3$ et $BC = 4$.

O est le milieu de $[BC]$.

1. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

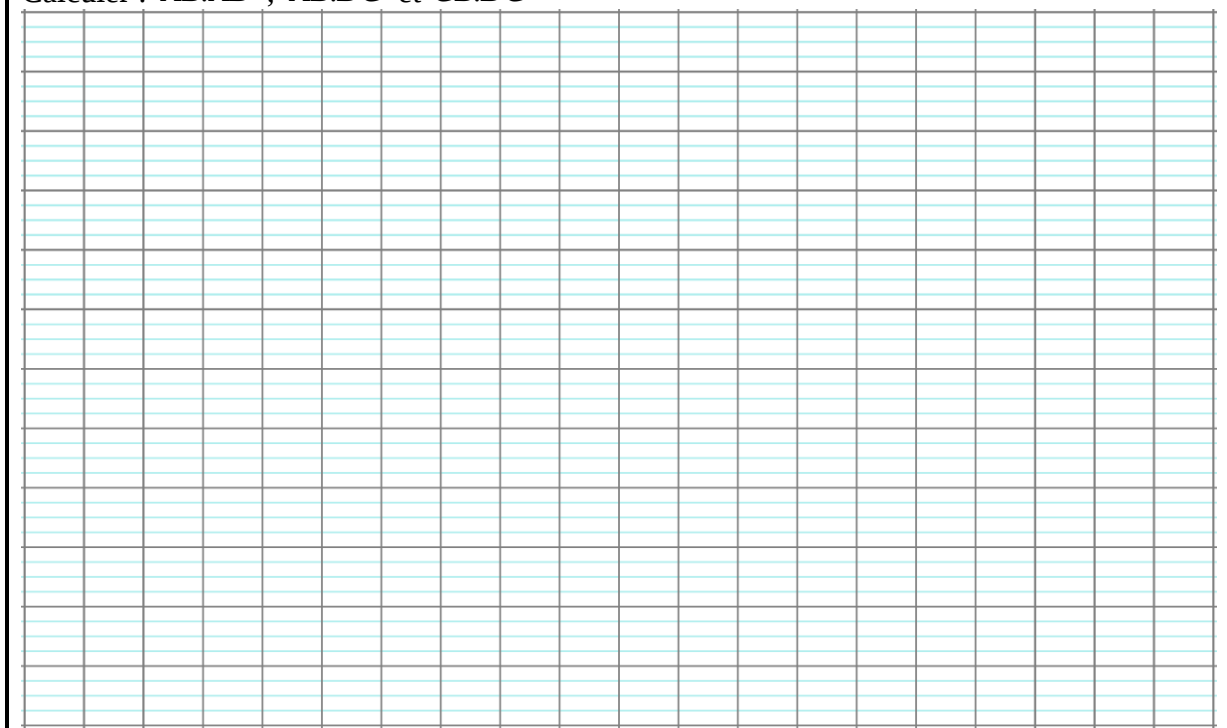
2. I est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Calculer BI .



Application 5

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 5$ et $BAD = \frac{\pi}{3}$.

Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DC}$



2. Produit scalaire en repère orthonormé

Propriété

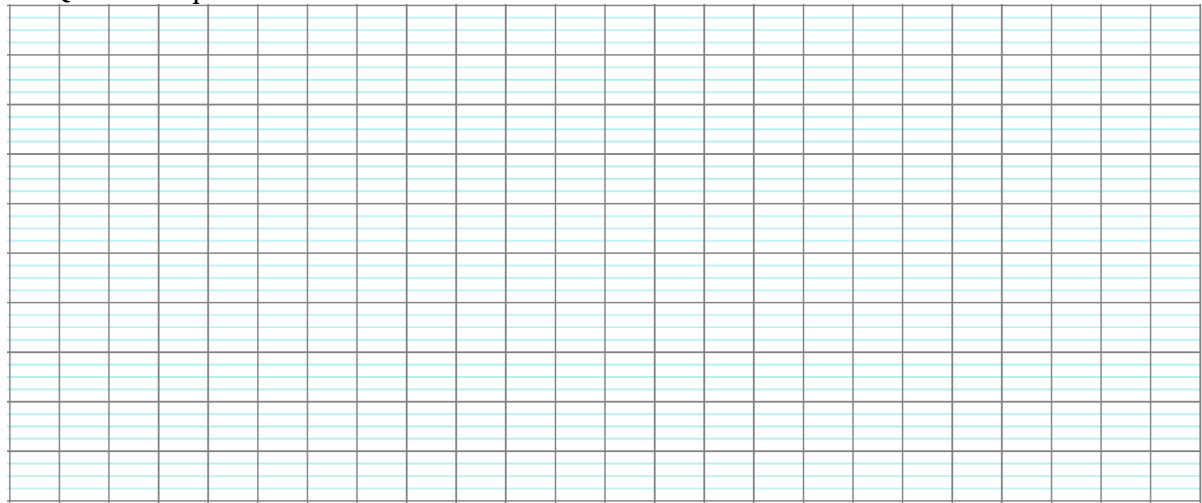
Dans un repère orthonormé, pour tous vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Application 7

Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne $A(1; -3)$, $B(-2; -1)$ et $C(5; 1)$.

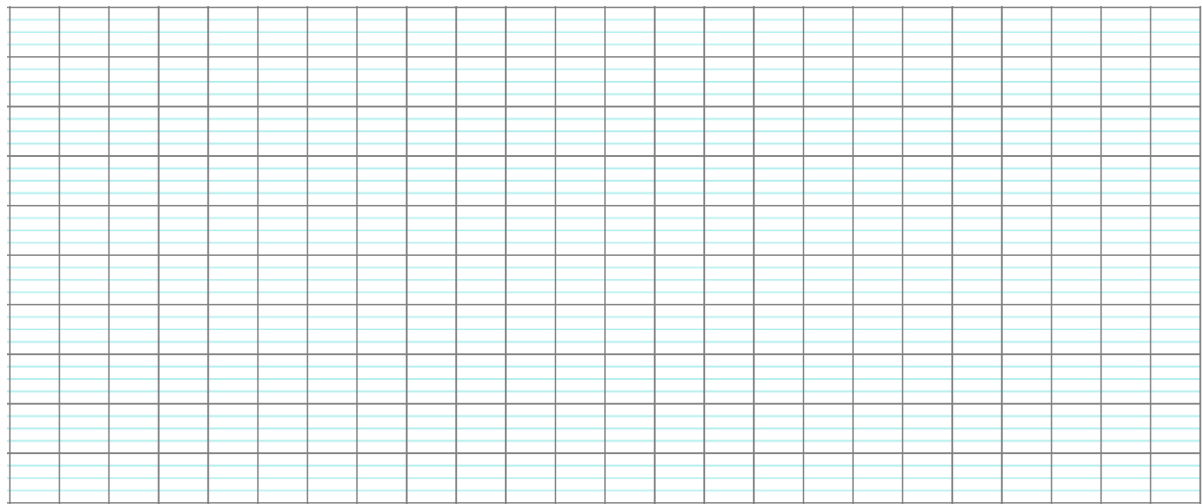
1. Calculer AB^2 , $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Que remarque-t-on ?



Application 8

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1; 0)$, $B(-2; -7)$, $C(12; -9)$ et $D(-9; -6)$.

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.



Application 9

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2;3)$, $B(-1;-2)$ et $C(-3;4)$.

1. Calculer AB , AC et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire une valeur approchée de l'angle BAC arrondi au dixième de degré près.

A full-page sheet of graph paper featuring a uniform grid of small squares. The grid consists of 20 columns and 20 rows, creating a total of 400 squares. The lines are thin and dark gray, set against a white background. There are no margins, text, or other markings on the page.

3. Bilinéarité du produit scalaire et conséquences

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel k on a :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Définition

Le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même est appelé carré scalaire de $\vec{u}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

On a $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

De même, $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2$.

Propriété : Identités remarquables

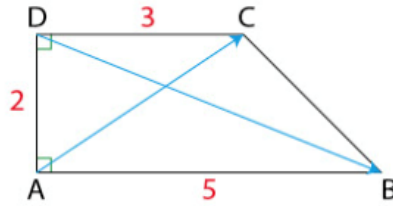
$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u} + \vec{v} \end{pmatrix}^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \qquad \begin{pmatrix} \vec{u} - \vec{v} \end{pmatrix}^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \qquad \begin{pmatrix} \vec{u} + \vec{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u} - \vec{v} \end{pmatrix} = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Application 10

$ABCD$ est le trapèze rectangle ci-dessous tel que : $AB = 5$, $AD = 2$ et $CD = 3$.



Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.

[illegible]

Application 11

On considère un triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 5$ et $BAC = 30^\circ$

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ d'une autre manière, déterminer la longueur AH .
3. En remarquant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, calculer $\overrightarrow{BC}^2$ puis la longueur BC .
4. En notant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

[illegible]

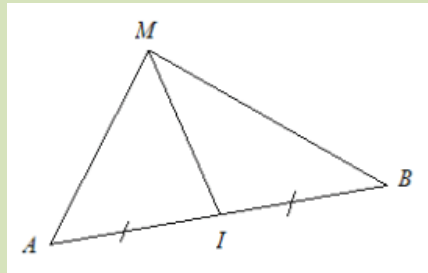


III. Calcul de longueurs et d'angles

Propriété

Soit A et B deux points du plan, et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$



Démonstration

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA})}_0 + \left(-\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}\right) \text{ car } I \text{ le milieu du segment } [AB].$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$$

Propriété

Soient deux points distincts A et B du plan.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration

Soit I le milieu du segment $[AB]$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4} AB^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{4} AB^2 \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2} AB.$$

M est un point du cercle de diamètre $[AB]$.

Application 12

On donne 2 points A et B .

Représenter l'ensemble des points P , tel que

$$PB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PB}$$



Propriété : Al-Kashi

Soit ABC un triangle.

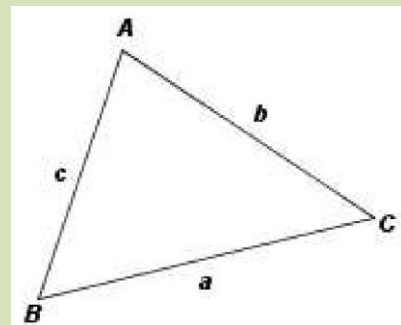
On pose $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

On a alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



Application 14

ABC est un triangle tel que : $AB = 5$, $AC = 7$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 25$.

1. Calculer l'angle A . En déduire BC .
2. En déduire la mesure des angles B et C . On arrondira au dixième de degré.

