

II. Suites géométriques

Définition

Une suite géométrique est une suite obtenue en multipliant le terme précédent toujours par un même nombre, appelé raison.

Pour tout n de \mathbb{N} , on note : $u_{n+1} = qu_n$.

Exemple

1 ; 3 ; 9 ; 27 est une suite géométrique de quatre termes, de premier terme 1 et de raison 3.

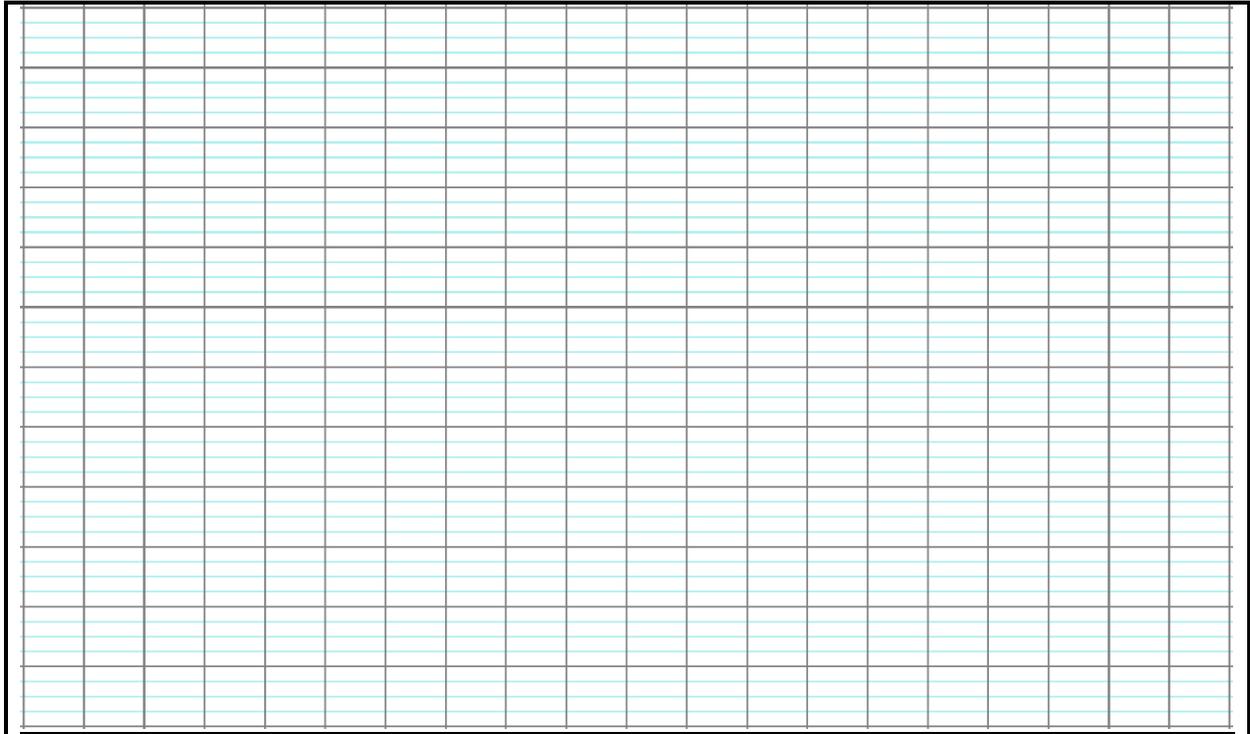
Propriété : Expression du terme général

Le terme de rang n d'une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q est :

$$u_n = u_0 q^n .$$

Si le premier terme est u_1 , on a : $u_n = u_1 q^{n-1}$.

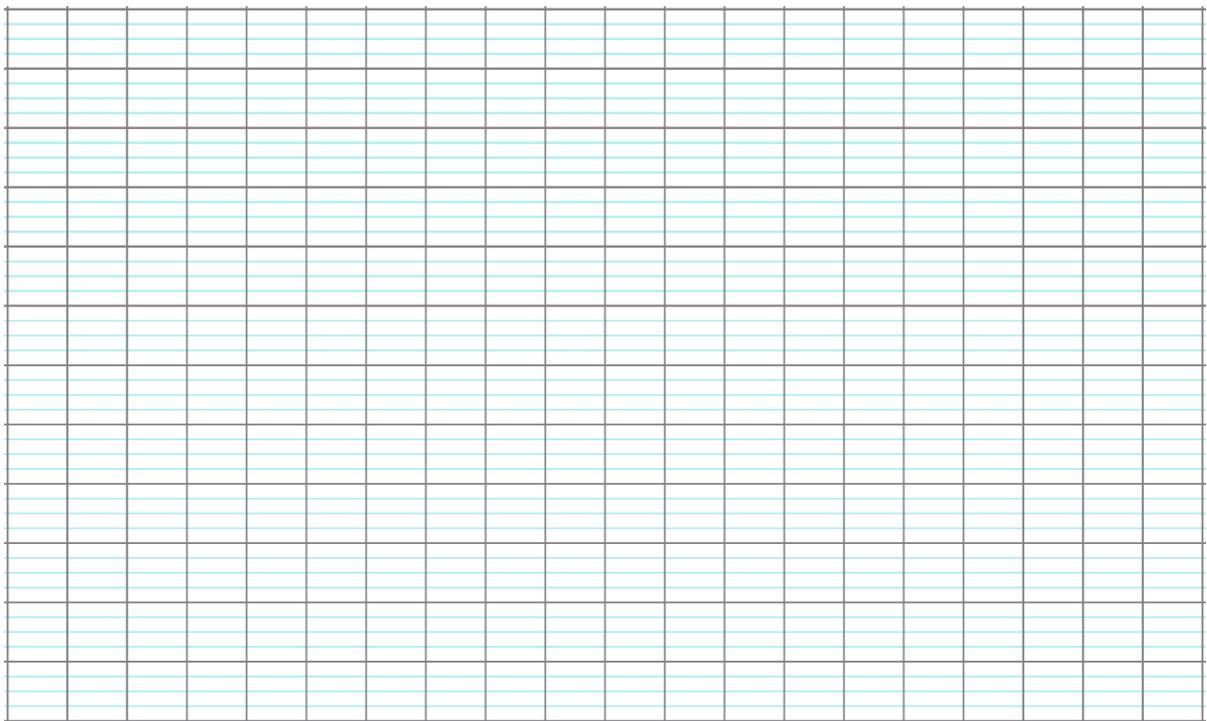
Plus généralement, si k est un entier quelconque, $u_n = u_k q^{n-k}$.

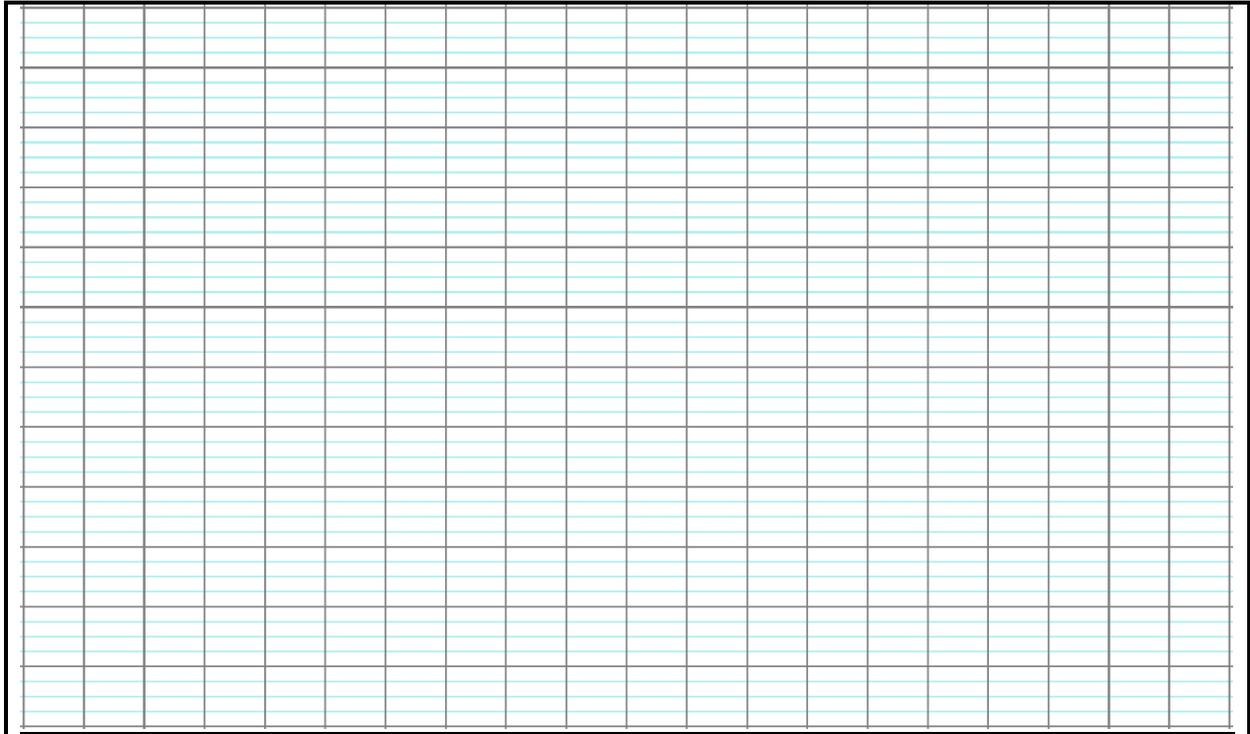


Application 6

On donne $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n + 8$.

1. Pour quelle valeur théorique de u_0 la suite (u_n) est constante. On appelle α cette valeur.
2. On pose $v_n = u_n - \alpha$. Montrer que (v_n) est géométrique. On précisera ses éléments caractéristiques.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .





III. Calcul de somme de termes consécutifs

Propriété : Somme de termes d'une suite arithmétique

Soit n un entier naturel non nul. Alors la somme des n premiers entiers non nuls est :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Plus généralement on a :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Démonstration

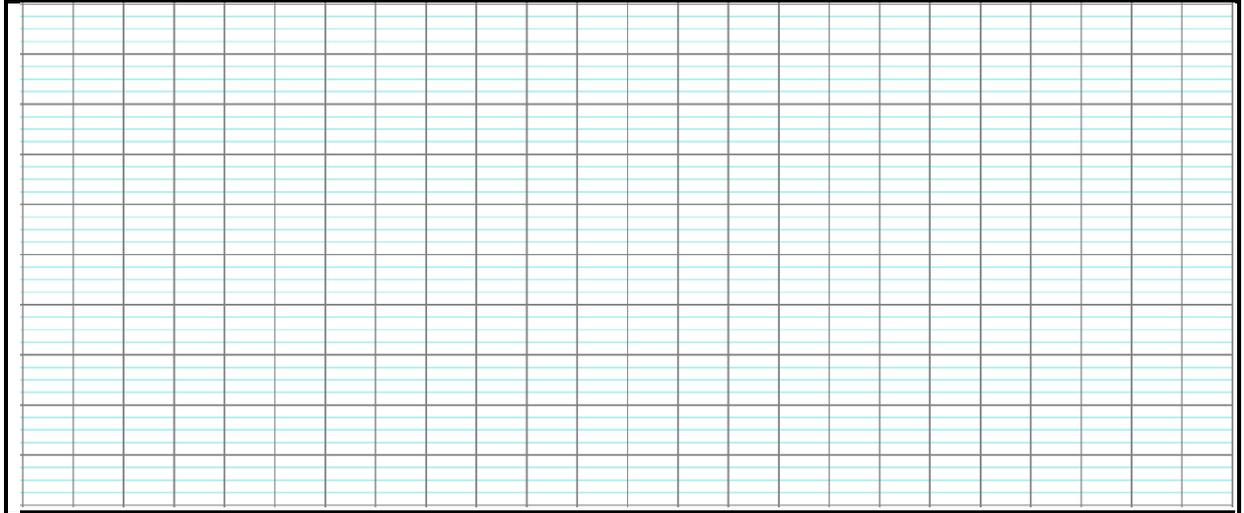
On pose :

$$S = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \quad \text{On a aussi :}$$

$$\text{Donc on a : } 2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ fois}}.$$

Donc $2S = n(n+1)$ d'où le résultat.



Application 11

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1}{3} \times 2^n - (7n + 4) \text{ et } v_n = \frac{1}{3} \times 2^n + 7n + 4.$$

Soit (w_n) et (t_n) deux suites définies par : $w_n = u_n + v_n$ et $t_n = u_n - v_n$.

1. Montrer que (w_n) est géométrique. On précisera le premier terme de la raison.
2. Montrer que (t_n) est arithmétique. On précisera le premier terme de la raison.
3. Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Donner une expression de S_n en fonction de n .



