

09 : Fonction exponentielle

I. Fonction exponentielle

1. Existence et unicité

Propriété 1

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et notée $\exp$.

Ainsi, pour tout réel x : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

Propriété 2

Pour tout réel x , on a : $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$.

Par conséquent : pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration

On pose pour tout réel x , $h(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables et, pour tout réel x :

$$h'(x) = \exp'(x) \times \exp(-x) + \exp(x) (\exp(-x))'$$

$$h'(x) = \exp(x) \times \exp(-x) - \exp(x) \times \exp(-x) = 0$$

$$h'(x) = 0$$

La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}$ et, comme $h(0) = 1$, on obtient pour tout réel x :

$$h(x) = 1.$$

Finalement, pour tout réel x , $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ et donc $\exp(x) \neq 0$.

Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :

$$1. \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

$$2. \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$3. \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$4. \exp(nx) = [\exp(x)]^n$$

Démonstration

1. Soit y réel fixé. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x)$.

$$f'(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x) + \exp(x+y) \times [-\exp(-x)]$$

$$f'(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x) - \exp(x+y) \times \exp(-x) = 0$$

$$f'(x) = 0$$

Donc f est constante. On a alors :

$$f(x) = f(0) = \exp(0+y) \times \exp(-0) = \exp(y).$$

$$\text{cad } \exp(x+y) \times \exp(-x) = \exp(y)$$

$$\text{d'où } \exp(x+y) = \frac{1}{\exp(-x)} \times \exp(y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

2. Propriété précédente

$$3. \exp(x-y) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

4. Admise

Notation

On note le nombre $\exp(1) = e$.

$e \approx 2,718$ à 10^{-3} près.

Pour tout réel x , on a : $\exp(x) = \exp(1 \times x) = [\exp(1)]^x = e^x$.

La propriété précédente donne :

$$1. e^{x+y} = e^x \times e^y \qquad 2. e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$3. e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad 4. e^{nx} = (e^x)^n$$

Application 1

Simplifier :

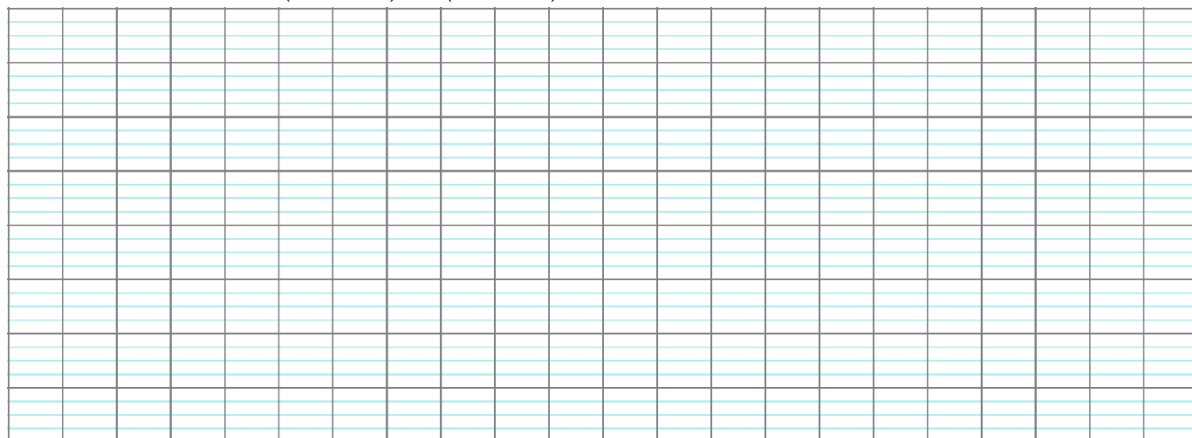
$$e^3 \times e^5 = \qquad e^{-3} \times e^7 = \qquad \frac{1}{e^2} = \qquad \frac{e^4}{e^9} =$$

$$(e^{-5})^2 = \qquad \frac{e^2 \times e^{-5}}{e^{-4} \times e^{-3}} = \qquad \frac{e^3 \times (e^{-2})^3}{e^5} =$$

Application 2

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

2. Simplifier $A(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.



II. Étude de la fonction exponentielle

1. Signe et sens de variation

Propriété

- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

On sait que, pour tout réel x , on a $e^x \neq 0$.

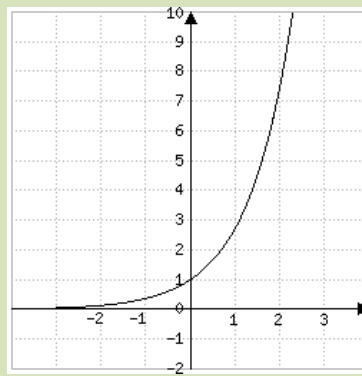
Donc $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$.

De plus $(e^x)' = e^x > 0$, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le tableau de variation de la fonction exponentielle est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp x)'$	+	
$\exp x$	0	$+\infty$

Représentation graphique



Propriété

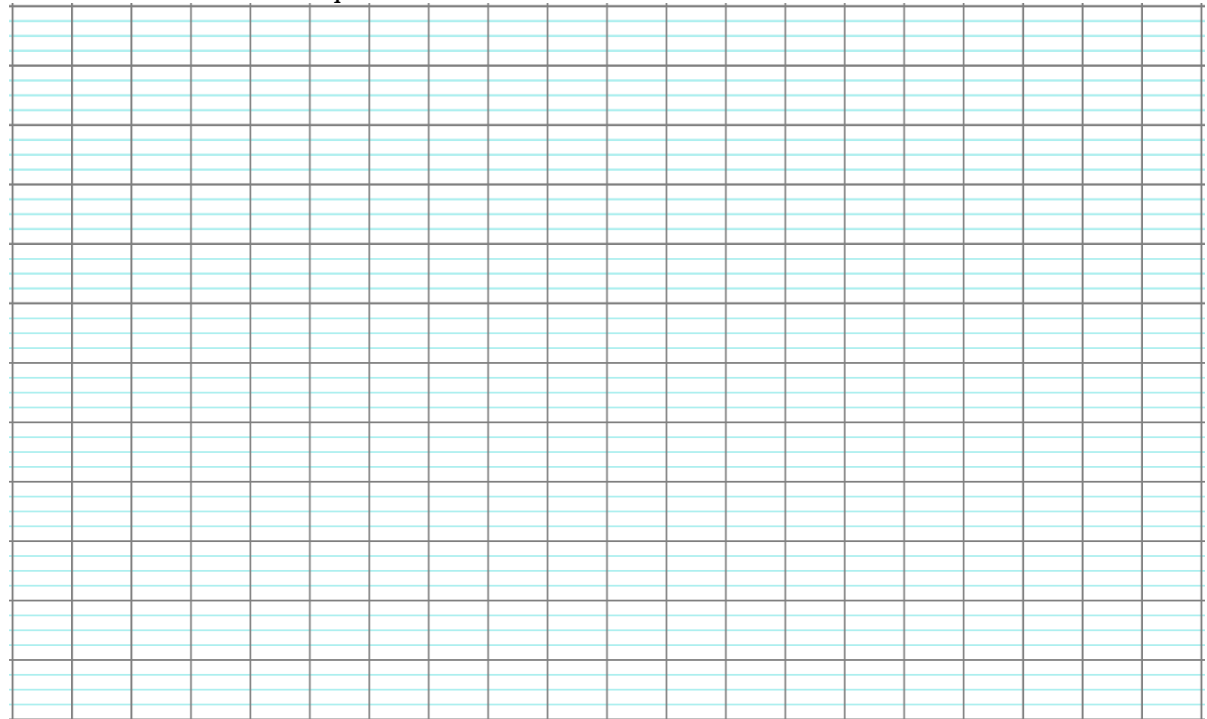
Pour tout réel x et y :

1. $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$
2. $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$

Application 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{4x-1} \geq 1$.



III. Croissance et décroissance exponentielle

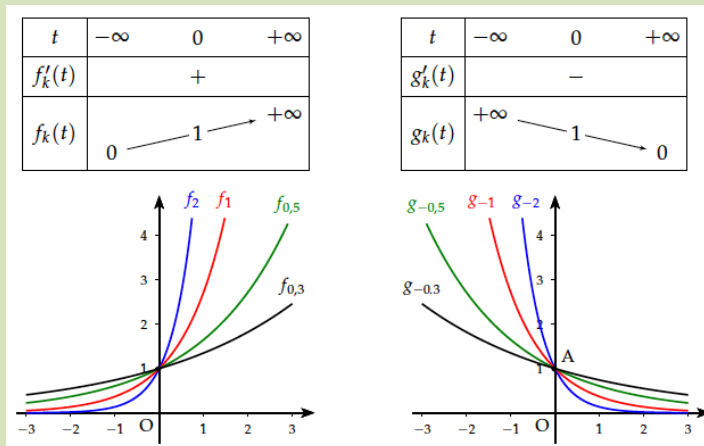
Propriété 1

Soit un réel $k > 0$, on considère les fonctions f_k et g_k sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(t) = e^{kt} \quad \text{et} \quad g_k(t) = e^{-kt}.$$

Les fonctions f_k correspondent à une croissance exponentielle.

Les fonctions g_k correspondent à une décroissance exponentielle ou atténuation.



Propriété 2

a et b sont 2 réels, u est une fonction dérivable. On a :

- $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$
- $(e^u)' = u' e^u$

Application 6

Etudier les variations des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$ et $g(x) = e^{-x^2}$.

