11 : Variables aléatoires

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

1. Variable aléatoire

Exemple

On considère l'expérience aléatoire : « on lance un dé à six faces et on regarde le résultat ».

L'ensemble de toutes les issues possibles s'appelle l'univers : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

On considère l'événement A : « on obtient un résultat pair ».
On a donc : $A = \{2;4;6\}$

On considère l'événement B : « on obtient un multiple de 5 ».
On a donc : $B = \{5\}$.

Définition

- Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une issue.
- L'univers est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
- Un événement est un sous-ensemble de l'univers.
- Un événement élémentaire est un événement contenant qu'une seule issue.

Exemple

Dans l'expérience précédente, on considère le jeu suivant :
- Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -4.

Définition : Variable aléatoire

Une variable aléatoire X est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel.

2. Loi de probabilité

Exemple

On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.

Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et a pour probabilité $\frac{1}{6}$.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à : $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

On note : $P(X=2)=\frac{1}{2}$.

De même $P(X=3)=\frac{1}{6}$, et $P(X=-4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

On peut résumer les résultats dans un tableau du style :

x_i	-4	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Ce tableau résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Définition : Loi de probabilité

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$.

La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $P(X=x_i)$.

Remarque

- $P(X=x_i)$ peut se noter p_i.
- $p_1+p_2+...+p_n=1$

Exemple

Dans l'exemple précédent on a :

- $p_1+p_2+p_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$
- $p(X\leq 2)=p(X=-4)+p(X=2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$
- $p(X>2)=p(X=3)=\frac{1}{6}$

Exercice 1

On considère l'expérience aléatoire : « On tire une carte dans un jeu de 32 cartes ».

- Si on tire un cœur, on gagne 2€.
- Si on tire un roi, on gagne 5€.
- Si on tire une autre carte, on perd 1€.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $p(X \geq 4)$.

II. Espérance, variance, écart-type

Dans ce paragraphe, X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Définition : Espérance

L'espérance de X est le nombre défini par : $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$

Définition : Variance

La variance de X est le nombre défini par :

$$V(X)=p_1\left(x_1-E(X)\right)^2+p_2\left(x_2-E(X)\right)^2+\dots p_n\left(x_n-E(X)\right)^2$$

Définition : Écart-type

L'écart-type de X est le nombre défini par : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Exercice 2

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

x_i	-4	0	4	20
$P(X=x_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

Remarques

- L'espérance correspond à la valeur moyenne que prend la variable aléatoire X.
- Lorsque X est une variable aléatoire donnant le gain algébrique d'un jeu, ce jeu est équitable si l'espérance est nulle.

Propriétés

- $V(X) = p_1 \times x_1^2 + p_2 \times x_2^2 + \ldots + p_n \times x_n^2 - E(X)^2$
- $E(aX+b) = aE(X)+b \qquad V(aX+b) = a^2V(X) \qquad \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

Démonstration

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= p_1 \times (ax_1+b) + p_2 \times (ax_2+b) + \ldots + p_n \times (ax_n+b) \\ &= ap_1x_1 + p_1b + ap_2x_2 + p_2b + \ldots + ap_nx_n + p_nb \\ &= a(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n) + b(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) \\ &= aE(X) + b \text{ car } p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \end{aligned}$$

Exercice 3

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.
L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.
On considère la variable aléatoire *X* qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.
La loi de probabilité de *X* est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Pour simplifier les calculer on considère la variable aléatoire $Y = 1000X - 1300$.
1. Déterminer la loi de probabilité de *Y*.
2. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.
3. En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de *X*.