Interrogation de mathématiques n°9

Exercice 1 – 5 points

Le principe d'un Escape Game est le suivant : une équipe de participants est enfermée à l'intérieur d'une salle à thème et doit réussir à en sortir en moins d'une heure (on parle alors de partie réussie). Au-delà d'une heure, les participants sont libérés et la partie est perdue.

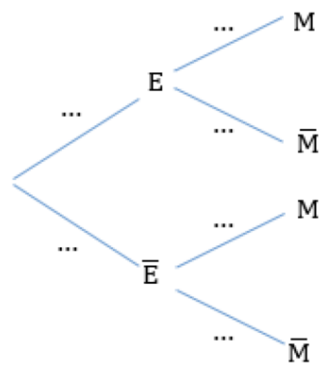
Un exploitant d'Escape Game propose à ses participants de faire deux parties à la suite : la première partie se déroule dans la salle à thème « Espion », la seconde partie dans la salle à thème « Musée ».
Il dispose des données suivantes :

* lorsqu'une équipe joue dans la salle à thème « Espion », la probabilité qu'elle réussisse sa partie « Espion » est égale à 0,5 ;
* lorsqu'une équipe a réussi la partie « Espion », la probabilité qu'elle réussisse sa partie « Musée » est égale à 0,6 ;
* lorsqu'une équipe n'a pas réussi la partie « Espion », la probabilité qu'elle réussisse sa partie « Musée » est égale à 0,45.

Une équipe est choisie au hasard. On note les événements suivants :

* E : « l'équipe réussit la partie « Espion » ;
* M : « l'équipe réussit la partie « Musée ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. Déterminer la probabilité que l'équipe réussisse les deux parties.

3. Montrer que la probabilité que l'équipe réussisse la partie « Musée » est égale à 0,525.

4. Quelle est la probabilité qu'une équipe échoue à la partie « Espion » sachant qu'elle a réussi la partie « Musée » ? On donnera la réponse arrondie à 10^{-2}.

5. L'équipe échoue à la partie « Musée ». Quelle est la probabilité qu'elle réussisse la partie « Espion » ? On donnera la réponse arrondie à 10^{-2}.

Exercice 2 – 5 points

Le 1er septembre 2023, un ensemble scolaire compte 3 000 élèves.
Une étude statistique interne a montré que chaque 1er septembre :

* 10 % de l'effectif quitte l'établissement ;
* 250 nouveaux élèves s'inscrivent.

On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel *n*, u_n représente le nombre d'élèves le 1er septembre de l'année $2023+n$.

1. Justifier qu'on peut modéliser la situation avec la suite (u_n) telle que $u_0 = 3000$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

2. Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n - 2500$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9. Préciser son premier terme v_0.

3. a. Exprimer, pour tout entier naturel *n*, v_n en fonction de *n*.

b. En déduire que pour tout entier naturel *n*, $u_n = 500 \times 0,9^n + 2500$.

4. a. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0,9^n$.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

5. La capacité optimale d'accueil est de 2 800 élèves. Ainsi, au 1er septembre 2023, l'ensemble scolaire compte un sureffectif de 200 élèves.
A l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle l'ensemble scolaire ne sera plus en sureffectif.

Exercice 3 – 4 points

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(2x-4)e^{x}$.

1. Calculer $g'(x)$.

2. Etudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et construire le tableau de variations de g.

3. En déduire que, pour tout réel x, $x+e^{1-x}\geq 2$.

4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentant g au point d'abscisse 1.

Exercice 4 – 6 points

La fonction f est définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$.

1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-2;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$.

2. a. Déterminer le signe de x^2+4x+3 sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire le signe de $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$ sur $]-2;+\infty[$ et construire le tableau de variations de f sur $]-2;+\infty[$.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

4. a. Montrer que, pour tout $x\in]-2;+\infty[$, $f(x)-\left(\dfrac{3x}{4}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{x^2}{4(x+2)}$.

b. En déduire la position relative entre la tangente T à la courbe représentative de f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.