Interrogation de mathématiques n°8

Exercice 1 *5 points*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -2u_n + 3$
1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison -2.

3. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.

4. Déterminer les variations de (u_n).

5. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 2 *4 points*

On considère la droite (d) d'équation $-x + y + 9 = 0$ et le point $A(0; 9)$.

1. Le point A appartient-il à la droite (d) ?

2. Donner un vecteur normal à la droite (d).

3. Déterminer une équation de la droite (d') perpendiculaire à la droite (d) passant par A.

4. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur (d).

Exercice 3 ***5 points***

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.

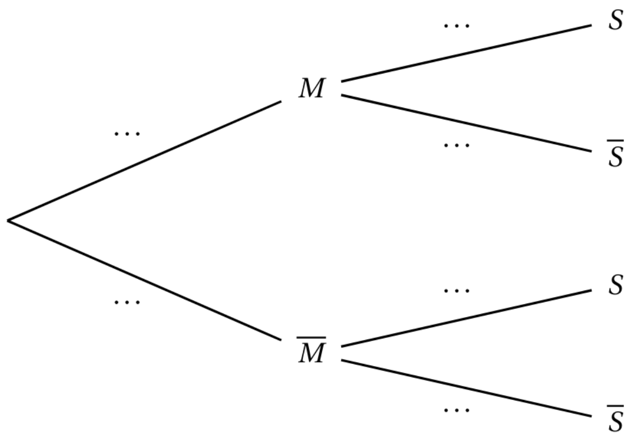
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique. On note :
* S l'évènement « le voyageur fait sonner le portique » ;
* M l'évènement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que :
* Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
* Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

a. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$, $P_{\overline{M}}(\bar{S})$.

b. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous illustrant cette situation.



c. Montrer que : $P(S) = 0{,}02192$.

d. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. (On arrondira le résultat à 10^{-3}).

4. On suppose que si le voyageur ne fait pas sonner le portique, il passe en 30 secondes et s'il fait sonner le portique il passe en 1 min 30 secondes le temps de le contrôler.
On définit T la variable aléatoire associée au temps de passage du voyageur donnée en seconde.

a. Définir la loi de probabilité de T.

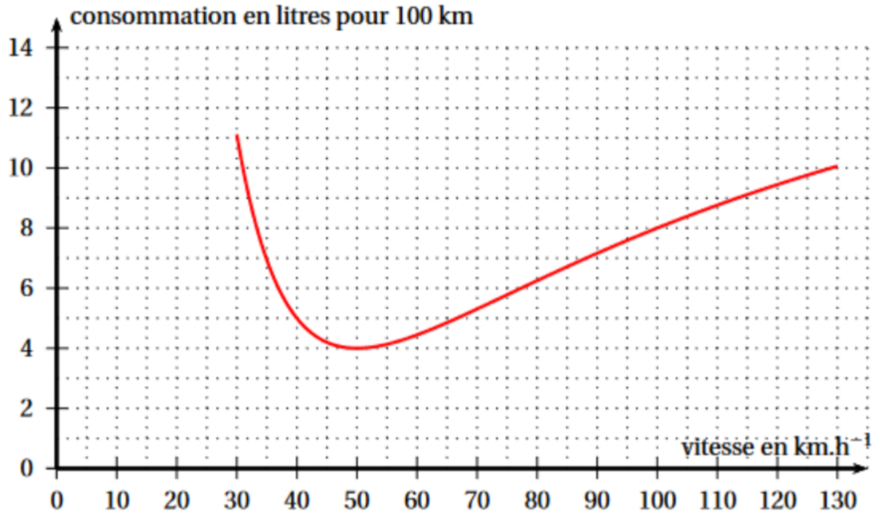
b. Calculer $E(T)$. Interpréter le résultat.

Exercice 4 *6 points*

On s'intéresse à la consommation d'essence d'un véhicule en fonction de sa vitesse.

Partie A : Lecture graphique

Le graphique ci-dessous représente la consommation d'essence en litres pour 100 km en fonction de la vitesse en km/h du véhicule.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la consommation du véhicule lorsque celui-ci roule à 40 km/h ?

2. Pour quelle(s) vitesse(s) le véhicule consomme-t-il 8 litres pour 100 km ?

3. Pour quelle vitesse la consommation du véhicule semble-t-elle minimale ?

Partie B : Modélisation

Si on note x la vitesse du véhicule en km/h, avec $30 \leq x \leq 130$, la consommation d'essence en litres pour 100 km est modélisée par la fonction f d'expression :

$$f(x) = \frac{20x^2 - 1600x + 40\,000}{x^2}$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[30; 130]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [30; 130]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1600(x - 50)}{x^3}$$

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$.

b. Construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[30; 130]$.

3. Retrouver le résultat de la **question 3** de la **partie A**.