

Interrogation de mathématiques n°4

Le sujet est composé de deux parties.

La première de 20 min sans calculatrice et la deuxième de 1h15min avec la calculatrice.

Partie 1 – Sans calculatrice : 20 min

Exercice 1 – 5 points

Compléter le tableau suivant :

Fonction	Dérivée
$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5x^2}{6} + \frac{3x}{4} + 1$	$f'(x) = 2x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{3}{4}$
$f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$
$f(x) = x\sqrt{x}$	$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
$f(x) = (3x+7)^2$	$f'(x) = 2 \times 3 (3x+7) = 6(3x+7) = 18x+42$
$f(x) = (x^2+1)(x^2-1)$	$f'(x) = 2x(x^2-1) + 2x(x^2+1) = 2x(2x^2) = 4x^3$

exo 2

1. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

2. $f'(x) = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1)$$

$$\Delta = 16$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2 \times 3}$$

$$x_1 = \frac{2-4}{6} \quad x_2 = \frac{2+4}{6}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} \quad x_2 = 1$$

Donc on a

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

car $a = 3 > 0$

3. Donc on a sur $[0; 3/2]$:

x	0	1	$3/2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(3/2) = -3/4$

4. On a, d'après le tableau:
pour $x \in [0; 3/2]$, $-1 \leq f(x) \leq 0$

5. $y = f'(x)(x-1) + f(1)$

avec $f(1) = -1$
 $f'(1) = 0$ Donc $y = -1$ tangente horizontale.

exo 3

1

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

2

x	$-\infty$	$+2$	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

1

3. C_2 et C_6 correspondent.

4. Comme $f(3) > 0$ C_2 est la courbe de f .

exo 4

1. $f(s) = \frac{s^2 - 15s + 400}{s} = 70$

Le coût moyen de $5m^2$ est 70 centaines d'euros
soit 7000 €.

2. Posons $f(x) = 43$

$$\frac{x^2 - 15x + 400}{x} = 43$$

$$x^2 - 15x + 400 = 43x$$

$$x^2 - 58x + 400 = 0$$

$$\Delta = (-58)^2 - 4 \times 1 \times 400$$

$$\Delta = 1764$$

$$x_1 = \frac{58 - \sqrt{1764}}{2}$$

$$x_1 = \frac{58 - 42}{2}$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = \frac{58 + 42}{2} = 50$$

Il faut donc $8m^2$ ou $50m^2$ d'engrais pour que le coût moyen soit de 4300 €

$$3. \quad f(x) = \frac{x^2 - 15x + 400}{x}$$

$$f(x) = x - 15 + \frac{400}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{400}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 400}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$$

$$\text{Sur } [5; 60] \quad \begin{array}{l} x+20 > 0 \\ x^2 > 0 \end{array}$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $x-20$

x	5	20	60
$f'(x)$	-	0	+
f	20	25	155/3

Donc pour 20m³ d'engrais le coût moyen est minimal et vaut alors 25 centaines d'euros soit 2500 €