Interrogation de mathématiques n°6
Sujet A

Exercice 1 – 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La suite (u_n) est arithmétique telle que $u_2 = 8$ et $u_7 = 23$. Alors on a :

a. $u_n = 2n+4$ **b.** $u_n = 5n-2$ **c.** $u_n = n+6$ **d.** $u_n = 3n+2$

2. La somme $S = 21+25+29+...+325$ vaut :

a. 13319 **b.** $u_n = 13320$ **c.** 13321 **d.** 13322

3. Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et par $u_2 = 23$. On a alors :

a. $u_0 = 4$ **b.** $u_0 = 5$ **c.** $u_0 = 6$ **d.** $u_0 = 7$

4. La suite (u_n) est géométrique telle que $u_2 = 12$ et $u_5 = 96$. On a alors :

a. $u_3 = 24$ **b.** $u_3 = 25$ **c.** $u_3 = 26$ **d.** $u_3 = 26$

5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et par $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$. On a alors :

a. (u_n) est croissante **b.** (u_n) est décroissante

c. (u_n) n'est pas monotone **d.** (u_n) est constante

Exercice 2 – 5 points

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2025 et a enregistré 2500 inscriptions en 2025. Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.
On modélise cette situation par une suite numérique (a_n). Ainsi on a $a_0 = 2500$ qui est le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2025 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2025+n$.

1. a. Calculer a_1 et a_2.

b. Justifier que, pour tout entier naturel *n*, on a : $a_{n+1} = 0,8a_n + 400$.

2. On pose, pour tout entier naturel *n*, $v_n = a_n - 2000$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme dont on déterminera le premier terme et sa raison.

b. En déduire l'expression de v_n puis de a_n en fonction de *n*.

c. Quel serait le nombre d'adhérents en 2030 en suivant ce modèle ?

3. On propose l'algorithme suivant :

```
a = 2500
n = 0
while ...
n = n+1
a = 0,8a + 400
return (2025+n)
```

a. Compléter cet algorithme afin qu'il donne l'année à partir de laquelle il y aura moins de 2100 adhérents.

b. Quelle est alors cette année ?

Exercice 3 – 5 points

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

On a tracé en annexe la fonction *f* définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.

1. a. Sur le graphique en annexe, construire les termes u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variations et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. Pour tout entier naturel *n*, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. On admet que pour tout entier naturel *n*, $u_n \neq 1$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ dont on précisera le premier terme.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*.

3. Déterminer le sens de variation de (u_n).

Exercice 4 – 5 points

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$.

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

a. Montrer que (v_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

b. Exprimer v_n en fonction de *n*.

c. Montrer que $u_n = \dfrac{3v_n + 1}{1 - v_n}$.

d. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*. En déduire u_6 en fraction irréductible.

Annexe de l'exercice 3 (A rendre avec la copie)