Correction du DST

Automatismes

1B 2A 3D 4C

Exercice 2

1. $u_1 = 1{,}5u_0 + 0 - 2$
$= 1{,}5 \times 2 - 2$
$= 3 - 2$
$= 1$

$u_2 = 1{,}5u_1 + 1 - 2$
$= 1{,}5 \times 1 - 1$
$= 1{,}5 - 1$
$= 0{,}5$

$u_3 = 1{,}5u_2 + 2 - 2$
$= 1{,}5 \times 0{,}5$
$= 0{,}75$

2. $u_{20} = 6610{,}5$ arrondi au dixième

Exercice 1

1. $u_8 = u_1 + 7r$
$32 = -3 + 7r$
$7r = 35$
$r = 5$

2. $u_n = u_1 + (n-1)r$
$u_n = -3 + 5(n-1)$
$u_n = -3 + 5n - 5$
$u_n = 5n - 8$

3. $u_{25} = 5 \times 25 - 8$
$= 125 - 8 = 117$

Exercice 3

1. $u_2 = 500 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right)$
$= 500 \times 1{,}02$
$= 510$

$u_3 = u_2 \times 1{,}02$
$= 510 \times 1{,}02$
$= 520{,}2$

2. $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{2}{100}\right)$
$u_{n+1} = 1{,}02\,u_n$
(u_n) est une suite géométrique de raison 1,02.

3. a. $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
$u_n = 500 \times 1{,}02^{n-1}$
$u_{20} = 500 \times 1{,}02^{19}$
$u_{20} = 728{,}41$ €

b. $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$
$= u_1 \cdot \frac{1 - q^{20}}{1 - q}$
$= 500\ \frac{1 - 1{,}02^{20}}{1 - 1{,}02}$
$\approx 12\,148{,}68$ €

Exercice 4

Affirmation 1 : vraie

$t_{n+1} = u_{n+1} - 5$
$= 2u_n - 5 - 5$
$= 2u_n - 10$
$= 2(u_n - 5)$
$= 2t_n$ Donc (t_n) suite géométrique de raison 2.

Affirmation 2 : vraie

$t_0 = u_0 - 5$ $\quad t_n = t_0 \times q^n$
$= 14 - 5$ $\quad = 9 \times 2^n$
$= 9$

Comme $t_n = u_n - 5$
$u_n = t_n + 5$
$u_n = 9 \times 2^n + 5$.

Affirmation 3 : vraie

$(8\times1+3) + (8\times2+3) + \cdots + (8\times n+3)$
$= (8\times1 + 8\times2 + \cdots + 8\times n) + (3+3+\cdots+3)$
$= 8(1+2+\cdots+n) + 3\times n$
$= 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 3n$
$= 4n(n+1) + 3n = n(4(n+1)+3) = n(4n+7)$

Exercice 5

1. $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}$
$= \frac{u_n + 1}{u_n}$
$= \frac{u_n}{u_n} + \frac{1}{u_n}$
$= 1 + v_n$ Donc (v_n) SA de raison 1.

Son 1er terme : $t_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$

2. $v_n = v_0 + nr$ Donc $v_n = \frac{1}{u_n}$
$v_n = \frac{1}{2} + n$
$u_n = \frac{1}{v_n}$
$u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + n \times 2} = \frac{2}{1+2n}$

Exercice 6

1. $u_1 = 0,8\,u_0 + 0,3\,v_0$
$= 0,8 \times 32 + 0,3 \times 18$
$= 31$

$v_1 = 0,2\,u_0 + 0,7\,v_0$
$= 0,2 \times 32 + 0,7 \times 18$
$= 19$

2. $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$
$= 0,8\,u_n + 0,3\,v_n + 0,2\,u_n + 0,7\,v_n$
$= u_n + v_n$
$= s_n$

Donc (s_n) est constante.

$s_n = s_0 = 32 + 18$
$= 50$

3. $t_{n+1} = -2u_{n+1} + 3v_n$
$= -2(0,8\,u_n + 0,3\,v_n) + 3(0,2\,u_n + 0,7\,v_n)$
$= -1,6\,u_n - 0,6\,v_n + 0,6\,u_n + 2,1\,v_n$
$= -u_n + 1,5\,v_n$
$= \frac{1}{2}(-2u_n + 3v_n)$
$= \frac{1}{2}\,t_n$

Donc (t_n) SG de raison $\frac{1}{2}$

$t_0 = -2u_0 + 3v_0$
$= -2 \times 32 + 3 \times 18$
$= -10$

4. $t_n = t_0 \times q^n$
$t_n = -10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

5. $s_n = s_0$
$u_n + v_n = 50$
$v_n = 50 - u_n$

$t_n = -2u_n + 3v_n$
$t_n = -2u_n + 3(50 - u_n)$
$t_n = -2u_n + 150 - 3u_n$
$t_n = -5u_n + 150$

Donc $5u_n = 150 - t_n$
$u_n = 30 - \frac{1}{5}t_n$
$u_n = 30 - \frac{1}{5}\left[-10\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$
$u_n = 30 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \left(30 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

$v_n = 50 - u_n$
$= 50 - \left[30 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$
$= 50 - 30 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$= 20 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \left(30 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$