Correction de l'interrogation de mathématiques n°1

Correction 1 – 4 points

On considère $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

1. Pour $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$, on a $a = 3$ et $b = -4$. La forme canonique est

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Puis,

$$\beta = P(\alpha) = P\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 1 = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\alpha = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \beta = -\frac{1}{3}}.$$

2. Puisque le coefficient du carré est positif, P décroît jusqu'à $x = \frac{2}{3}$, puis croît. Son minimum est $-\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Le sommet est

$$\boxed{S\left(\frac{2}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\right)}.$$

4. L'axe de symétrie a pour équation

$$\boxed{x = \frac{2}{3}}.$$

5. On calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2}{6} = 1.$$

Donc

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{3}\,;\,1\right\}}.$$

Correction 2 – 4 points

1. Les valeurs interdites sont $x = -2$ et $x = \frac{5}{2}$. Pour toute autre valeur de x,

$$\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-5} = \frac{(2x-5) - 2(x+2)}{(x+2)(2x-5)} = \frac{-9}{(x+2)(2x-5)}.$$

L'équation devient donc

$$\frac{-9}{(x+2)(2x-5)} = \frac{9}{4} \iff (x+2)(2x-5) = -4.$$

En développant, on obtient

$$2x^2 - x - 6 = 0.$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49.$$

Ainsi,

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{49}}{4} = -\frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{49}}{4} = 2.$$

Ces deux valeurs sont autorisées, donc

$$\boxed{S = \left\{-\frac{3}{2}\,;\,2\right\}}.$$

2. On étudie séparément le signe des deux polynômes du second degré.
Pour le numérateur $2x^2+5x+3$, le discriminant vaut

$$\Delta_1 = 5^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1.$$

Ses racines sont

$$x_1 = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5+1}{4} = -1.$$

Comme le coefficient de x^2 est positif, le polynôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.
Pour le dénominateur x^2+x-2, le discriminant vaut

$$\Delta_2 = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9.$$

Ses racines sont

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Comme le coefficient de x^2 est positif, le polynôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. Le quotient n'est pas défini en $x=-2$ et $x=1$.
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$2x^2+5x+3$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Q		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Le quotient est strictement positif sur

$$\boxed{S =]-\infty\,;\,-2[\cup \left]-\frac{3}{2}\,;\,-1\right[\cup]1\,;\,+\infty[}.$$

Correction 3 – 2 points

On cherche deux nombres u et v dont la somme est $s = -9$ et le produit $p = -70$. Ce sont les racines de l'équation

$$x^2 - sx + p = 0.$$

On obtient donc

$$x^2 - (-9)x + (-70) = 0,$$

soit

$$x^2 + 9x - 70 = 0.$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = 9^2 - 4 \times 1 \times (-70) = 81 + 280 = 361 = 19^2.$$

Les solutions sont

$$x_1 = \frac{-9 - 19}{2} = -14 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-9 + 19}{2} = 5.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Les deux nombres sont } -14 \text{ et } 5.}$$

Correction 4 – 3 points

Posons $X = x^2$. L'équation devient

$$X^2 + 5X - 36 = 0.$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-36) = 25 + 144 = 169 = 13^2.$$

Les solutions de cette équation sont

$$X_1 = \frac{-5 - 13}{2} = -9 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-5 + 13}{2} = 4.$$

Or $X = x^2 \geq 0$, donc $X = -9$ est impossible. Il reste $x^2 = 4$, d'où

$$\boxed{S = \{-2\,;\,2\}}.$$

Correction 5 – 4 points

On considère

$$P(x) = x^3 - x^2 - 76x - 140.$$

1.

$$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 76(-2) - 140 = -8 - 4 + 152 - 140 = 0.$$

Donc

$$\boxed{-2 \text{ est une racine de } P}.$$

2. On cherche a, b et c tels que

$$P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c).$$

En développant, on obtient

$$P(x) = ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c.$$

Par identification avec

$$P(x) = x^3 - x^2 - 76x - 140,$$

on obtient le système

$$\begin{cases} a = 1, \\ b + 2a = -1, \\ c + 2b = -76, \\ 2c = -140. \end{cases}$$

Ainsi, $a = 1$, puis $b = -3$ et $c = -70$. On vérifie bien que $c + 2b = -70 - 6 = -76$. Donc

$$\boxed{a = 1, \qquad b = -3, \qquad c = -70}.$$

3. On résout

$$P(x) = 0 \iff (x+2)(x^2 - 3x - 70) = 0.$$

D'après la règle du produit nul,

$$x + 2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 - 3x - 70 = 0.$$

Pour le second facteur, calculons le discriminant :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-70) = 9 + 280 = 289 = 17^2.$$

Les deux racines sont

$$x_1 = \frac{3 - 17}{2} = -7 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3 + 17}{2} = 10.$$

Le premier facteur donne $x = -2$. Ainsi,

$$\boxed{S = \{-7\,;\, -2\,;\, 10\}}.$$

Correction 6 – 3 points

On considère l'équation

$$E : \quad mx^2 + 12x + 9m = 0, \qquad m \neq 0.$$

1. Comme $m \neq 0$, E est une équation du second degré. Elle admet une unique solution réelle si et seulement si son discriminant est nul :

$$\Delta = 12^2 - 4 \times m \times 9m = 144 - 36m^2.$$

Alors

$$\Delta = 0 \iff 144 - 36m^2 = 0 \iff m^2 = 4 \iff \boxed{m = 2 \text{ ou } m = -2}.$$

2. Lorsque $\Delta = 0$, la solution double est

$$x_0 = -\frac{12}{2m} = -\frac{6}{m}.$$

Pour $m = 2$, $x_0 = -3$. Pour $m = -2$, $x_0 = 3$. Donc

$$\boxed{\text{si } m = 2,\ x_0 = -3; \qquad \text{si } m = -2,\ x_0 = 3.}$$

3. Pour que -1 soit solution de E, on remplace x par -1 :

$$m(-1)^2 + 12(-1) + 9m = 0 \iff m - 12 + 9m = 0 \iff 10m = 12.$$

Ainsi,

$$\boxed{m = \frac{6}{5}}.$$