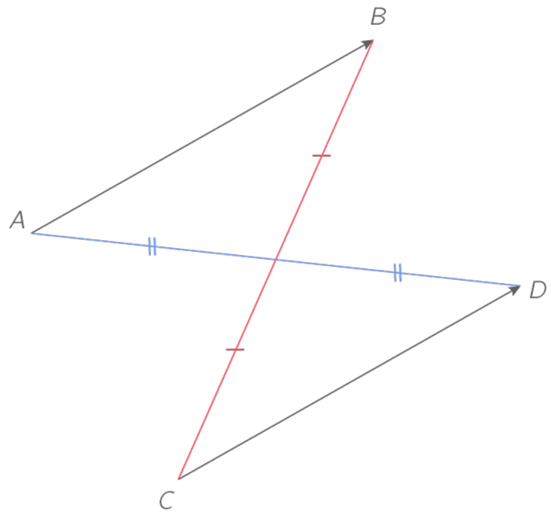
03 : Les vecteurs

I. Notion de vecteur

1. Translation et vecteur

Définition

Soit A et B deux points distincts du plan.
La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Si le point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, alors $ABDC$ est un parallélogramme.



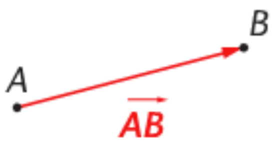
Interprétation

Lorsque A et B sont distincts, la translation qui transforme A en B est un « glissement » :

- Dans la direction de la droite (AB) ;
- Dans le sens de A vers B ;
- De longueur AB.

Représentation d'un vecteur

- Lorsque A et B sont distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est symbolisé par une flèche de A vers B.
- La longueur AB est appelée norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Le point A est appelé origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et B son extrémité.



Définition

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- Une direction : la droite (AB)
- Un sens : de A vers B
- Une norme : la longueur AB

2. Égalité de vecteurs

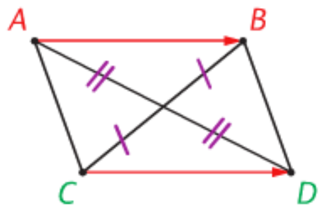
Définition

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsque D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Propriété

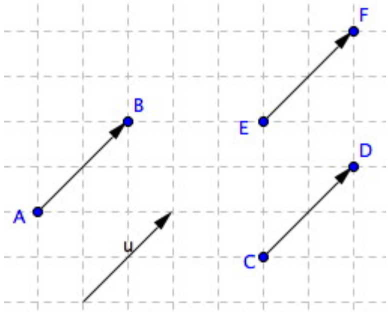
On considère deux points distincts du plan A et B.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si est seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si est seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, le même sens et la même longueur.



3. Représentation d'un vecteur

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ alors on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont les représentants d'un même vecteur que l'on peut noter $\vec{u}$.



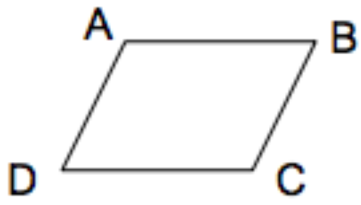
Remarque

Un vecteur a une infinité de représentants.

Application 1

ABCD est un parallélogramme, construire les points *E*, *F*, *G* et *H* tels que :

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$



4. Vecteur nul

Définition

La translation qui transforme *A* en *A* est la translation de vecteur nul, que l'on note $\vec{0}$.

Conséquence

$\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si, et seulement si *A* et *B* sont confondus.

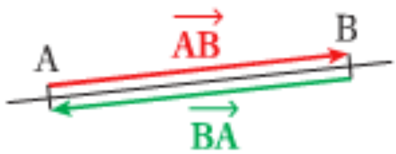
5. Vecteurs opposés

Définition

Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{BA}$ associé à la translation qui transforme *B* en *A*. On a alors $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Remarque

Les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ ont la même direction, la même longueur mais des sens opposés.



Exercice 1

On considère un parallélogramme *NOTE*.
1. Construire les points *A* et *B*, images respectives des points *N* et *E* par les translations de vecteurs $\overrightarrow{TE}$ et $\overrightarrow{OT}$.
2. Montrer que *E* est le milieu du segment $[BN]$.

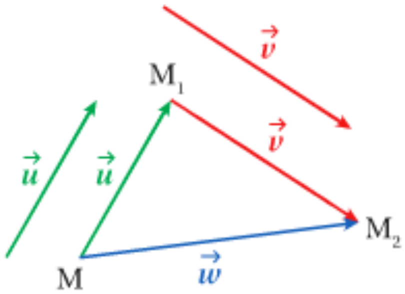
Exercice 2

Soit VER un triangle non aplati.
1. Construire les points T et J, images du point V par les translations respectives de vecteurs $\overrightarrow{ER}$ et $\overrightarrow{RE}$.
2. Établir que $\overrightarrow{JV} = \overrightarrow{VT}$. Que peut-on en déduire ?

II. Somme de deux vecteurs

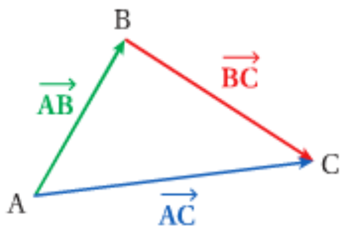
1. Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.
On en écrit : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.



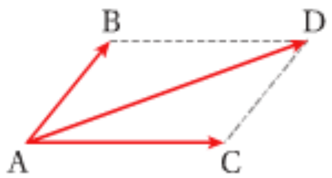
2. La relation de Chasles

Pour tous points A, B et C on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



Règle du parallélogramme

Soit A, B et C trois points du plan.
Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme si est seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



Démonstration

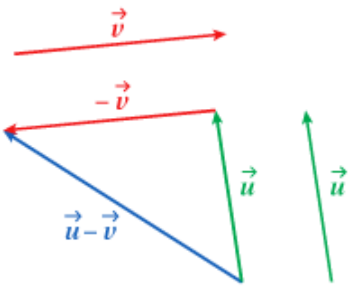
Supposons que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, d'où $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
Autrement dit $ABDC$ est un parallélogramme.

3. Cas particulier : Différence de deux vecteurs

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On appelle différence du vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ tel que :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$$



Application 1

Simplifier les écritures :

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$ $\quad$ $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$ $\quad$ $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$ $\quad$ $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$ $\quad$ $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$

Application 2

Soit A, B et C trois points du plan, I le milieu de $\left[AB\right]$ et J le milieu de $\left[AC\right]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$.

2. Montrer que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Application 3

Soit A, B, C et D quatre points du plan. Démontrer les égalités suivantes :

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ $\quad$ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ $\quad$ $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DC}$

Exercice 3

Soit I le milieu d'un segment $[AB]$ et M un point n'appartenant pas à la droite (AB).

1. Construire les points C et D tels que : $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IM}$
2. Quelle est la nature des quadrilatères $AIMC$ et $IBDM$?
3. Démontrer que M est le milieu de $[CD]$.
4. Démontrer que $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{BM}$.
5. Soit E le symétrique de I par rapport à M.
a. Traduire cette propriété par une égalité vectorielle.
b. Démontrer que $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IE}$.

III. Produit d'un vecteur par un réel et colinéarité

1. Produit d'un vecteur par un réel

Définition

$\vec{u}$ est un vecteur non nul et k un nombre réel non nul.
On appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, le vecteur noté $k\vec{u}$:

- De même direction $\vec{u}$;
- De même sens que $\vec{u}$ si $k>0$, et de sens contraire si $k<0$;
- De norme égale à $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$.

Exemple avec $\vec{u}$, $2\vec{u}$ et $-3\vec{u}$.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels k et k', on a :

$k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$ $\quad$ $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$ $\quad$ $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$

$k\vec{u}=\vec{0}$ ssi $k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$.

2. Colinéarité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'ils ont même direction, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

Exemple

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{v} = -3\vec{u}$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété

- A, B, C et D étant quatre points deux à deux distincts du plan, dire que les droites (AB) et (CD) et sont parallèles équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Dire que les points A, B et C sont alignés équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Application

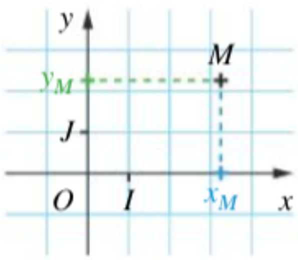
Démontrer le théorème de la droite des milieux.

IV. Coordonnées d'un vecteur

1. Repère orthonormé

Définition

Un repère du plan, défini par trois points non alignés O, I et J est orthonormé lorsque le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.
Le point O est l'origine du repère, la droite (OI) est l'axe des abscisses et la droite (OJ) est l'axe des ordonnées.
On a $OI = OJ = 1$ unité.



Remarque

- Le repère (O, I, J) se note également $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ ou encore $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en posant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
- Dans un repère, tout point M est repéré par un unique couple de réels $(x; y)$ appelé coordonnées. On note $M(x; y)$, x est l'abscisse et y l'ordonnée du point M.

2. Coordonnées d'un vecteur

Propriété

- Pour tout point $M(x;y)$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

  On dit que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, il existe un unique couple de réels $(x;y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On dit que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et *k* un réel.

- $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Remarque

Le vecteur $-\vec{u}$ a pour coordonnées $(-x;-y)$.

Exercice 4

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ b+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2a-1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels *a* et *b* tel que $3\vec{u} = -\vec{v}$.

Propriété

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(-5;2)$, $B(-3;1)$, $C(0;5)$ et $D(2;4)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer les coordonnées du point *E* tel que *ABCE* soit un parallélogramme.
3. Montrer que *C* est le milieu de $[ED]$.
4. Déterminer les coordonnées des points *F*, *G* et *H* tels que :
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}$ $\overrightarrow{BG}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{ED}$ $\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}$

3. Critère de colinéarité

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

- On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre $\text{Det}\left(\vec{u};\vec{v}\right)=xy'-x'y$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi leurs coordonnées ssi $\text{Det}\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$

Exercice 6
On considère les vecteurs $\vec{u}(-6;3)$, $\vec{v}(2;-1)$ et $\vec{w}(4;2)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Étudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

Exercice 7
Soit les points $A(-1;1)$, $B(3;2)$, $C(-2;-3)$ et $D(6;-1)$.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 8
Soit les points $B(3;2)$, $D(6;-1)$ et $E(5;0)$.
Démontrer que les points *B*, *D* et *E* sont alignés.

Exercice 9
Déterminer la valeur de *x* pour laquelle les vecteurs $\vec{u}(2;5)$ et $\vec{v}(x;3)$ sont colinéaires.

Exercice 10

On donne les points $E(-1;-2)$, $F(3;-4)$ et $G(4;7)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}$.
2. En déduire les coordonnées du point *H* tel que *EFHG* soit un parallélogramme.