05 : Généralités sur les fonctions

I. Fonctions et courbes représentatives

1. Définition et vocabulaire

Définition

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
On appelle fonction f définie sur D un procédé qui à tout réel x de D associe un unique réel, noté $f(x)$.
D est appelé l'ensemble de définition de la fonction f.

Vocabulaire

Pour un nombre a de D, si $f(a)=b$, on dit que :

- b est l'image de a par la fonction f.
- a est un antécédent de b par la fonction f.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3x+2$.
$f(1)=1^2-3\times1+2=0$.
Donc 0 est l'image de 1 par f, et 1 est un antécédent de 0 par f.
$f(2)=2^2-3\times2+2=0$.
Donc 0 est l'image de 2 par f, et 2 est un antécédent de 0 par f.
0 a donc deux antécédents par f : 1 et 2.

On peut utiliser la calculatrice pour calculer des images par f. On peut les ranger dans un tableau de valeurs :

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	20	12	6	2	0	0	2	6	12

2. Représentation graphique d'une fonction

Définition

Dans un repère du plan, on appelle courbe représentative ou représentation graphique de la fonction f, notée C_f, l'ensemble des points M de coordonnées $(x;f(x))$, avec $x\in D$.
La relation $y=f(x)$ est appelée équation de la courbe C_f.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 5$.

Le point $A(3;2)$ est un point de la courbe C_f. En effet :

$f(3) = -3^2 + 2\times 3 + 5 = -9 + 6 + 5 = 2$.

Le point $B(-2;-4)$ n'est un point de la courbe C_f. En effet :

$f(-2) = -(-2)^2 + 2\times(-2) + 5 = -4 - 4 + 5 = -3$.

3. Fonction paire, fonction impaire

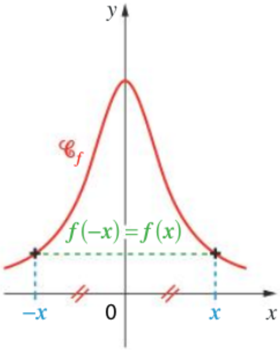
Définition

On considère une fonction f définie sur l'ensemble D centré en 0.

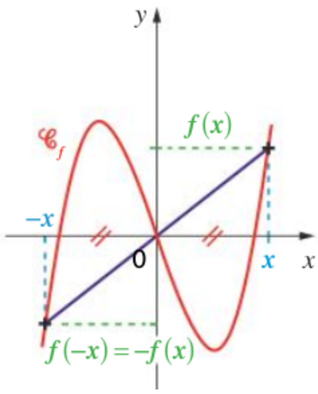
- On dit que f est paire si pour tout réel $x \in D$, on a $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est impaire si pour tout réel $x \in D$, on a $f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique dans un repère orthogonal

- La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



- La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Exercice 1

Soit *f* définie par $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de *f*.

2. Le point $A\left(2;\dfrac{3}{5}\right)$ est-il un point de la courbe ? Qu'en est-il pour le point $B\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{4}\right)$?

3. Quelle est la parité de la fonction *f* ?

4. En déduire un autre antécédent de $\dfrac{3}{5}$.

II. Fonctions de référence

1. Fonction carré

Définition

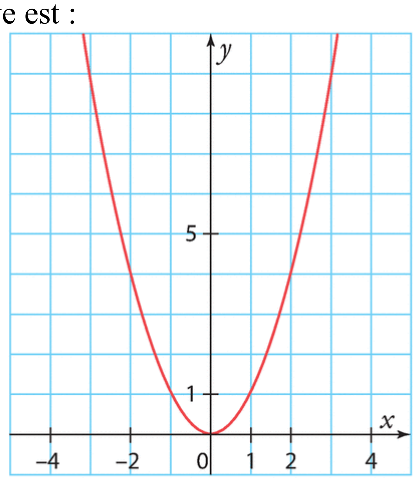
La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
Sa courbe représentative dans un repère orthonormé est une parabole *P* de sommet l'origine du repère.

Remarques

- $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. Donc la fonction carré est paire. *P* est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Un tableau de valeurs est :

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

- Sa courbe représentative est :



2. Fonction inverse

Définition

La fonction inverse est définie sur la réunion d'intervalles $\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$, noté $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

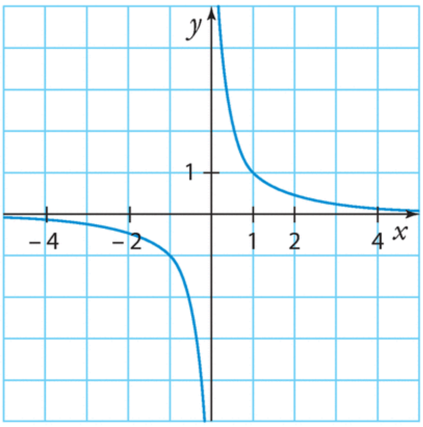
Sa courbe représentative dans un repère orthonormé est une hyperbole *H* qui admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

Remarques

- La réunion $\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$ est centrée en 0. $f(-x)=\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}=-f(x)$. Donc la fonction inverse est impaire. *H* est symétrie par rapport à l'origine du repère *O*.
- Un tableau de valeurs est :

x	− 2	− 1	− 0,5	0	0,5	1	2
$f(x)$	− 0,5	− 1	− 2	X	2	1	0,5

- Sa courbe représentative est :



3. Fonction cube

Définition

La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x \mapsto x^3$.

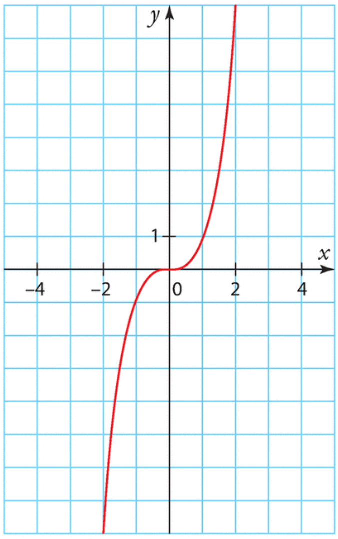
Remarques

- $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$. Donc la fonction cube est impaire.

- Un tableau de valeurs est :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

- Sa courbe représentative est :



2. Fonction racine carrée

Définition

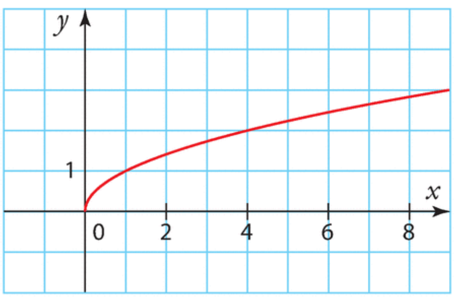
La fonction racine carrée est la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Remarques

- $[0;+\infty[$ n'est pas centré en 0, donc la fonction racine carrée n'est ni paire ni impaire.
- Un tableau de valeurs est :

x	0	1	2	3	4	5	9
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$	2	$\sqrt{5} \approx 2{,}24$	3

- Sa courbe représentative est :



Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $3x^2+4=31$ **b.** $x^2+15=6$ **c.** $(2-3x)^2=16$ **d.** $\dfrac{1}{x-2}=4$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $4x^2+9>25$ **b.** $4x^2+100\leq 0$ **c.** $x^3>64$ **d.** $\sqrt{x}\leq 5$

III. Fonctions de référence et comparaison

1. Inégalités et fonctions de référence

Propriété 1 : Conservation de l'ordre

- Si $0\leq a<b$, alors $a^2<b^2$
- Si $a<b$, alors $a^3<b^3$
- Si $0<a<b$, alors $\sqrt{a}<\sqrt{b}$

Propriété 2 : Inversion de l'ordre

- Si $a<b\leq 0$, alors $a^2>b^2$
- Si $a<b<0$, alors $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$
- Si $0<a<b$, alors $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

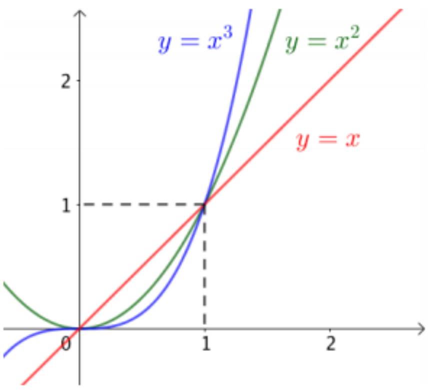
2. Positions relatives des courbes

Propriété

On note C_1, C_2 et C_3 les courbes d'équations respectives $y=x$, $y=x^2$ et $y=x^3$.

- Sur $[0;1]$, C_1 est au-dessus de C_2, qui est elle-même au-dessus de C_3.
  Autrement dit, pour tout réel $x\in[0;1]$ on a $x^3\leq x^2\leq x$.

- Sur $[1;+\infty[$, C_3 est au-dessus de C_2, qui est elle-même au-dessus de C_1.
  Autrement dit, pour tout réel $x\in[1;+\infty[$ on a $x\leq x^2\leq x^3$.



<u>Démonstration</u>

- Soit un réel $x \in [0;1]$, on a $0 \leq x \leq 1$. En multipliant par $x \geq 0$ on a $0 \leq x^2 \leq x$. En multipliant une deuxième fois par $x \geq 0$ on a $0 \leq x^3 \leq x^2$. On en déduit : $x^3 \leq x^2 \leq x$.
- Soit un réel $x \in [1;+\infty[$, on a $1 \leq x$. En multipliant par $x \geq 0$ on a $x \leq x^2$. En multipliant une deuxième fois par $x \geq 0$ on a $x^2 \leq x^3$. On en déduit : $x \leq x^2 \leq x^3$.

Exercice 3

1. Comparer les nombres suivants :

a. $0{,}98^2$ et $0{,}908^2$ **b.** $\frac{1}{4}$ et $0{,}04^2$

c. $-\frac{1}{0{,}03}$ et $-\frac{1}{0{,}029}$ **d.** $(1{,}31)^3$ et $\left(\frac{4}{3}\right)^3$

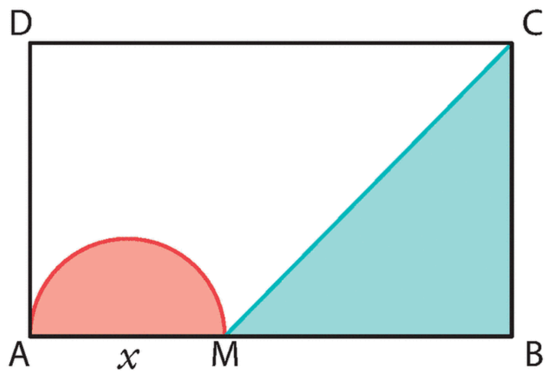
2. Soit a un nombre tel que $a>1$. Comparer les nombres suivants :

a. $1+a$; $(1+a)^2$ et $(1+a)^3$ **b.** $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{a^2}$ et $\left(\frac{1}{a}\right)^3$.

Exercice 4

Soit $ABCD$ un rectangle. On place un point M libre sur le segment $[AB]$.
Comme sur la figure ci-contre, on trace un demi-cercle de diamètre $[AM]$ et le triangle MBC. On note x la distance AM.

Le graphique représente les aires $f(x)$ et $g(x)$ du demi-disque et du triangle.



1. Identifier les courbes de f et de g. Justifier.

2. Retrouver les dimensions du rectangle $ABCD$. En déduire son aire en fonction de x.

3. Estimer graphiquement la valeur de x pour que le demi-disque et le triangle aient la même aire, puis en donner une valeur approchée au centième.