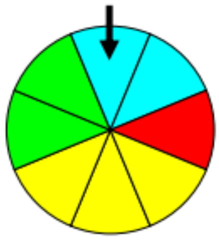
08 : Probabilités

I. Expérience aléatoire

1. Exemples

- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
- On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.



2. Définition

- Une expérience est aléatoire lorsqu'elle a plusieurs résultats ou issues et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.
- L'ensemble des issues d'une expérience s'appelle l'univers, en général noté Ω.

Exemples

- Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé et regarder la face qui apparaît.
  L'univers $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
- Une autre expérience aléatoire consiste à faire tourner une roue et regarder la couleur.
  L'univers $\Omega = \{\text{bleu ; vert ; jaune ; rouge}\}$.

3. Réalisations d'une expérience aléatoire : Simulation d'un lancer de dé

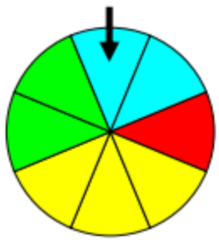
Fiche excel

Les fréquences d'apparition sont très proches les unes des autres.
Théoriquement, il y a autant de chance d'obtenir un 1, un 2, … ou un 6.
En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente.

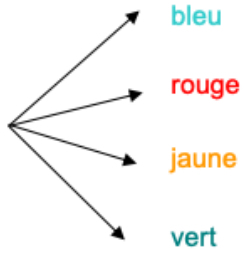
II. Probabilité d'un événement

1. Arbre de probabilités

Exemple



Lorsqu'on fait tourner la roue, quatre issues sont possibles. On le schématise sur l'arbre de probabilités :



2. Probabilité

Définition

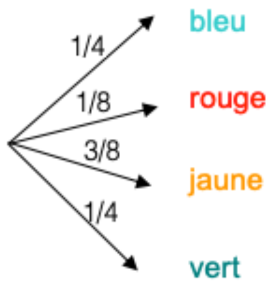
Les fréquences obtenues d'un événement E se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expériences augmente (Loi des grands nombres).
Cette valeur s'appelle la probabilité de l'événement E.

Exemple

2 secteurs sur 8 sont de couleur bleue.
Lors d'une expérience aléatoire, il y a donc 2 chances sur 8 d'obtenir un secteur de couleur bleue.

On dit que la probabilité d'obtenir un secteur bleu est égale à $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

On inscrit sur l'arbre des possibles les probabilités des différentes issues.



3. Événements

Définitions

- Un événement est constitué de plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.
- Les événements élémentaires sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

Exemple

Soit E l'événement : « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge ».

$E = \{\text{bleu ; rouge}\}$

$P(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Propriétés

- La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.
- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Définition

L'ensemble des probabilités de ces événements élémentaires constitue ce qu'on appelle la loi de probabilité. On peut résumer les résultats dans un tableau.

Application 1

On lance un dé pas équilibré à 6 faces.
On donne la loi de probabilité suivante :

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,3	0,1	0,15	p	0,2	0,07

1. Calculer p.

2. On note A l'événement : « le résultat est pair » et B l'événement : « le résultat est supérieur ou égale à 4 ».
Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

4. Événement contraire

L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est constitué de toutes les issues de Ω ne réalisant pas A.
Sa probabilité est : $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)$

Exemple

On reprend l'exemple précédent.
$\overline{A}$ est l'événement : « le résultat est impair ».
$P\left(\overline{A}\right)=1-0,35=0,65$

$\overline{B}$ est l'événement : « le résultat est inférieur ou égal à 3 ».
$P\left(\overline{B}\right)=1-0,45=0,55$

Exercice 1

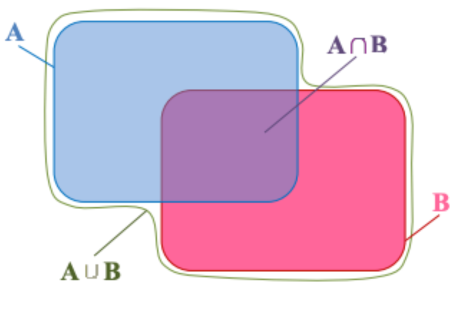
Une urne contient des 3 boules noires et 7 boules blanches.
On tire une boule de l'urne et on regarde sa couleur, puis on la remet dans l'urne, ensuite on tire une deuxième boule et on regarde sa couleur.
1. Construire un arbre de probabilités.

2. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « On obtient 2 boules noires »
B : « On obtient 2 boules de même couleur »
C : « On obtient 2 boules de couleurs différentes »
D : « On obtient au moins une boules blanche »

III. Réunion et intersection de deux événements

1. Définitions

- L'événement « A et B », noté $A\cap B$, est réalisé lorsque les deux événements A et B sont simultanément réalisés.
- L'événement « A ou B », noté $A\cup B$, est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.



<u>Exemple</u>

On tire une carte d'un jeu de 32.
On note :
A : « On obtient un as »
B : « On obtient un cœur ou un pique »
L'intersection des événements A et B est : « on obtient l'as de cœur ou l'as de pique »
L'union des événements A et B est : « on obtient un cœur ou un pique ou l'as de carreau ou l'as de trèfle »

2. <u>Théorème</u>

Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

<u>Application 2</u>

On reprend l'exemple précédent.
Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

<u>Exercice 2</u>

Une agence de voyage a effectué un sondage auprès de ses clients pendant la période estivale. Les résultats de ce sondage sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Voyage à l'étranger	**Voyage en France**	**Total**
Satisfait	1209		1988
Non satisfait			
Total	1550		2500

1. Compléter le tableau.

2. On choisit au hasard un client de cette agence.
a. Déterminer la probabilité que le client soit satisfait.

b. Déterminer la probabilité que le client ne soit pas satisfait et qu'il ait effectué son voyage en France.

c. On choisit un client ayant voyagé à l'étranger. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas satisfait ?

4. On choisit un client satisfait. Quelle est la probabilité qu'il ait voyagé à l'étranger ?

5. Quelle est la probabilité que le client soit satisfait sachant qu'il a voyagé à l'étranger ?

3. Événements incompatibles

Définition

- On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.
- Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple

On tire une carte d'un jeu de 32.
On note :
A : « On obtient un as » et B : « On obtient un roi ».
Les événements sont incompatibles. On a donc $A \cap B = \varnothing$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$