09 : Nombres entiers – Arithmétique

I. Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

1. Ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Définition

- L'ensemble des nombres entiers naturels $\{0;1;2;...\}$ est noté $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des nombres entiers relatifs $\{...;-2;-1;0;1;2;...\}$ est noté $\mathbb{Z}$.

Remarques

- La somme, la différence et le produit de deux entiers relatifs sont des entiers relatifs.
- Pour la division dans $\mathbb{Z}$, on utilise la division euclidienne.
  Pour tous entiers relatifs *a* et *b*, avec *b* non nul, on peut écrire *a* de façon unique sous la forme : $a = b \times q + r$, où *q* est un entier relatif *r* un entier naturel tel que $0 \leq r < b$
  q est appelé quotient et *r* reste de la division.

Exemples

$32 = 4 \times 5 + 12$ mais 12 n'est pas le reste de la division de 32 par 5 car $12 > 5$.
$32 = 8 \times 5 + 2$ avec $2 < 5$ donc 2 est le reste et 8 est le quotient.

2. Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

Définitions

Soit *a* et *b* deux nombres entiers.
S'il existe un nombre entier *k* tel que $a = k \times b$, on dit que :

- *b* est un diviseur de *a* ;
- ou que *a* est un multiple de *b*.

Remarque

Tout nombre relatif non nul admet 1 et lui-même comme diviseurs car $n = 1 \times n$.
Il admet une infinité de multiples de la forme kn, où $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété

On considère trois entiers relatifs *a*, *n* et *m*.
Si les entiers *n* et *m* sont deux multiples de *a*, alors la somme $(n+m)$, la différence $(n-m)$ et le produit $n \times m$ sont aussi des multiples de *a*.

Démonstration pour la somme

n est un multiple de *a* on peut écrire $n = k_1 a$, où $k \in \mathbb{Z}$.
De même, on peut écrire $m = k_2 a$, où $k \in \mathbb{Z}$.
On en déduit que $n + m = k_1 a + k_2 a = (k_1 + k_2) a$.
Or $(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, par définition, *a* est un diviseur de $(n + m)$.
Autrement dit, la somme $(n + m)$ est un multiple de *a*.

Exemples

45 et 90 sont des multiples de 15 donc $45 + 90 = 135$ est un multiple de 15 $(135 = 15 \times 9)$.

3. Nombres premiers

Définition

Un nombre entier naturel est premier s'il n'admet que deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Remarques

- 1 n'est pas premier car il n'admet qu'un seul diviseur : lui-même.
- 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19…sont des nombres premiers.

Théorème : Test de primalité

Quel que soit l'entier naturel *n* supérieur ou égal à 2, si *n* n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$ alors *n* est premier.

Application

Dire si les nombres 443, 527 et 792 sont premiers et donner une décomposition en produit de facteurs premiers les nombres qui ne le sont pas.

Exercice 1

Soit N un nombre à 3 chiffres.
On note C le chiffre des centaines, D le chiffre des dizaines et U le chiffre des unités de N.
1. Écrire N en fonction de C, D et U.

2. Écrire la division euclidienne de 100 par 9, puis de 10 par 9.

3. Justifier que $N = 9(11C + D) + (C + D + U)$.

4. Que peut-on dire si la somme des chiffres du nombre N est un multiple de 9 ?

5. Que retrouve-t-on ?

6. 256 et 568 sont-ils divisibles par 9 ?

II. Nombres pairs – Nombres impairs

1. Définitions

Définitions et Propriété

On considère un entier relatif n.

- Si n est divisible par 2 (ou si n est un multiple de 2), on dit que n est pair.
  Il existe alors un entier relatif k tel que $n = 2k$.

- Sinon, on dit que n est impair. Il existe alors un entier relatif k tel que $n = 2k + 1$.

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{Z}$.
On effectue la division euclidienne de n par 2 :
On obtient $n = 2k + r$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq r < 2$.
On a soit $r = 0$, soit r =1.

- Si n est pair, alors 2 divise n et $r = 0$. Donc $n = 2k$.
- Sinon, n est impair et 2 ne divise par n. Donc $r \neq 0$. Ainsi $r = 1$ et $n = 2k + 1$.

2. Parité et somme d'entiers

Propriétés

- La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.
- La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
- La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Démonstration pour la somme de deux entiers impairs

Soit a et b deux entiers impairs.
Donc $a = 2k_1 + 1$ et $b = 2k_2 + 1$, avec k_1 et k_2 deux entiers relatifs.
Donc $a + b = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2) + 2 = 2(k_1 + k_2 + 1)$ avec $k_1 + k_2 + 1$ un entier relatif.
Donc $a + b$ est un multiple de 2, donc pair.

3. Parité d'un carré

Propriété

On considère un entier relatif n.

- Si n est pair, alors n^2 est pair.
- Si n est impair, alors n^2 est impair.

Démonstration

On considère un entier relatif n.

- Si n est pair, on peut écrire $n = 2k$ avec k un entier relatif.
  Alors $n^2 = (2k)\times(2k) = 2(2k^2)$. Donc 2 divise n^2, d'où n^2 est pair.

- Si n est impair, on peut écrire $n = 2k + 1$ avec k un entier relatif.
  Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, avec $2k^2 + 2k$ un entier relatif.
  Donc n^2 est impair.

Exercice 2

On souhaite démontrer que le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
Pour cela, on va raisonner par l'absurde, en supposant que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire en supposant qu'on l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.
On pose : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec a et b des entiers relatifs n'ayant aucun diviseur premier en commun.

1. Justifier que $a^2 = 2b^2$. En déduire la parité de a.

2. On pose $a = 2k$, où k est un entier relatif. Justifier que $b^2 = 2k^2$. En déduire la parité de b.

3. Conclure.

Exercice 3

Montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.

Exercice 4

Soit p un nombre premier différent de 2.
1. Quelle est la parité de p ? de $p-1$? de $p+1$?

2. Quelle est alors la parité de p^2-1?

Exercice 5

Montrer que si a divise b et b divise c, alors a divise c.

Exercice 6

Montrer pour tout entier naturel n que :
1. L'entier naturel $3n^2+n$ est pair.

2. Si n^2+5 n'est pas divisible par 2 alors n est pair, utilisant la contraposée.