

## Interrogation de mathématiques n°1

### Exercice 1

*4 points*

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$ .

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier  $n$ ,  $u_n = n^2 + n$ .

### Exercice 2

*12 points*

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et telle que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}.$$

1. a. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 < u_n$ .

2. On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n < 1$ .

a. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

b. Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge.

3. Soit  $(v_n)$  la suite définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$ .

a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n$  en fonction de  $n$ .

c. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$ .

d. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Exercice 3

*4 points*

Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 2x}{1 - 2x^2}$

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n}$