Interrogation de mathématiques n°3

Exercice 1 *3 points*

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 9 \times 2^n + 5$.

Exercice 2 *7 points*

Partie A

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.

2. a. Établir que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

b. Déterminer la monotonie de la suite (u_n). En déduire que (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+0{,}5u_n}{0{,}5+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

```
Lire n
u ← 2
pour i variant de 1 à n faire
    u ← (1 + 0.5u) / (0.5 + u)
    Afficher u
fin
```

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 9$.
Les valeurs de *u* seront arrondies à 10^{-4}.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u									

Conjecturer le comportement de (u_n) à l'infini.

2. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de *n*.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $v_n \neq 1$.

b. montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 *4 points*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\ln x + \ln(x+1) = \ln 2$ **b.** $\ln(x+1) = \ln\left(\dfrac{x+10}{x+2}\right)$

2.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2 + X - 6 = 0$.

b. En déduire les solutions des équations :

$(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$ $e^{2x} + e^x - 6 = 0$

Exercice 4 *6 points*

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par , $u(x)=x^2-2+\ln x$.

1. Étudier les variations de u sur $]0;+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. a. Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique sur $]0;+\infty[$. On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha=2-\alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$.

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.