Interrogation de mathématiques n°5

Exercice 1 *5 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel *n*,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ et } v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel *n*, vérifie $u_n \leq w_n \leq v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.

b. La suite (w_n) converge vers 1.

c. La suite (u_n) est minorée par 1.

d. La suite (w_n) est croissante.

2. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$.
La fonction dérivée de *f* est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2xe^{x^2}$

b. $f'(x) = (1+2x)e^{x^2}$

c. $f'(x) = (1+2x^2)e^{x^2}$

d. $f'(x) = (2+x^2)e^{x^2}$

3. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1

b. 0

c. $\dfrac{1}{2}$

d. $+\infty$

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $\left[-1;1\right]$ telle que :

$$h(-1)=0 \qquad\qquad h(0)=2 \qquad\qquad h(1)=0$$

On peut affirmer que :

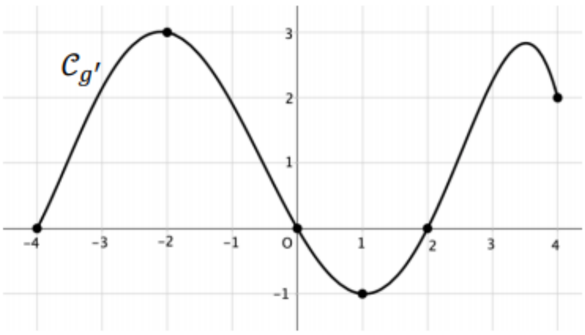
a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $\left[-1;0\right]$.

b. La fonction h est positive sur l'intervalle $\left[-1;1\right]$.

c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $\left[0;1\right]$ tel que $h(a)=1$.

d. L'équation $h(x)=1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $\left[-1;1\right]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $\left[-4;4\right]$.
On donne ci-dessous la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.



On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.

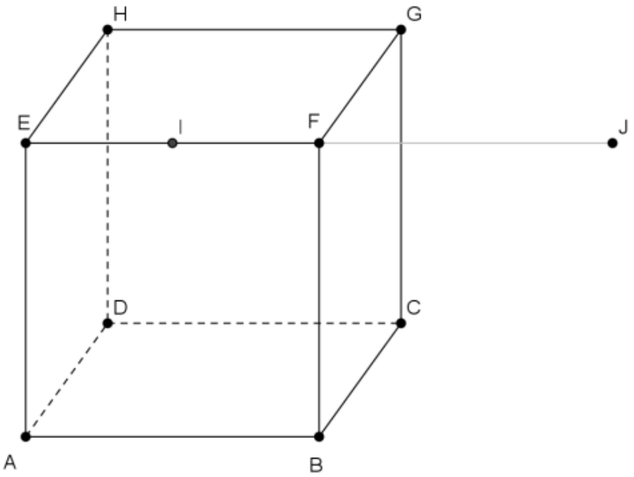
b. g est croissante sur l'intervalle $\left[1;2\right]$.

c. g est convexe sur l'intervalle $\left[1;2\right]$.

d. g admet un minimum en 0.

Exercice 2 *7 points*

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1, le milieu I de $\left[EF\right]$ et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

1. a. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.

b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.

c. Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan $\left(BGI\right)$.

d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\left(BGI\right)$ est $2x - y + z - 2 = 0$.

2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan $\left(BGI\right)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$. Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan $\left(BGI\right)$.

3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

où B est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Calculer le volume de la pyramide $FBGI$.

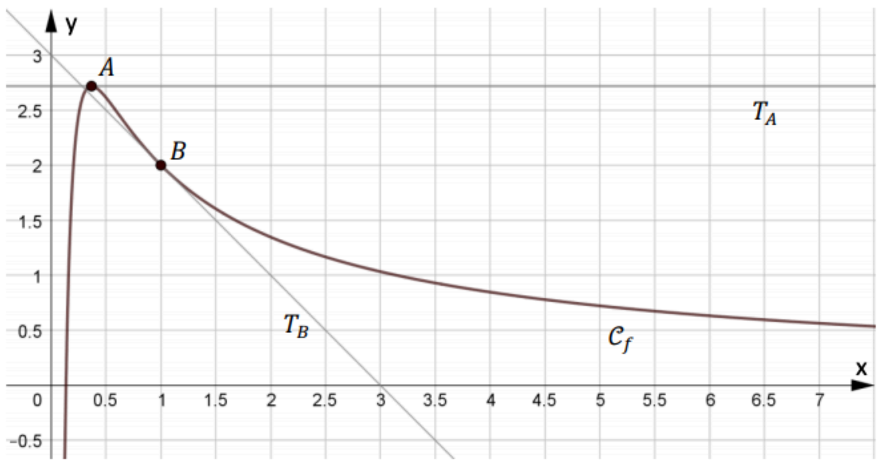
b. En déduire l'aire du triangle BGI.

Exercice 3 *8 points*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- La courbe représentative C_f d'une fonction *f* définie et dérivable sur $]0;+\infty[$;
- La tangente T_A à la courbe C_f au point *A* de coordonnées $\left(\frac{1}{e};e\right)$;
- La tangente T_B à la courbe C_f au point *B* de coordonnées $(1;2)$.
-

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;3)$.



On note f' la fonction dérivée de *f*.

Partie I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.

2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction *f* est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2+\ln(x)}{x}$.

1. Par le calcul, montrer que la courbe C_f passe par les points *A* et *B* et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand *x* tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand *x* tend vers $+\infty$. Interpréter les résultats.

3. Montrer que, pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}$.

4. Dresser le tableau de variations de *f* sur $\left]0;+\infty\right[$.

5. On note f'' la fonction dérivée seconde de *f*.

On admet que, pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$, $f''(x) = \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3}$.

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel *f* est convexe.