Interrogation de mathématiques n°1 – bis
Correction

Exercice 1 – 4 points

Initialisation

Pour $n=0$, $u_0=\dfrac{0(0-1)}{2}=0$ donc vrai.

Hérédité

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

montrons que $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)(n+1-1)}{2}=\dfrac{(n+1)n}{2}$

On a $u_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Donc $u_{n+1}=u_n+n=\dfrac{n(n-1)}{2}+n=\dfrac{n(n-1)+2n}{2}=\dfrac{n(n-1+2)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Conclusion

$u_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 2 – Amérique du nord – Mai 21

1. • 2021 correspond à $n=1$, donc $u_1=0,75u_0\times(1-0,15u_0)=0,75\times0,6\times(1-0,15\times0,6)=0,45\times(1-0,09)=0,45\times0,91=0{,}409\,5$ soit environ 410 individus.

   • 2022 correspond à $n=2$, donc $u_2=0,75u_1\times(1-0,15u_1)=0,75\times0{,}409\,5\times(1-0,15\times0{,}409\,5)=0{,}307\,125\times(1-0{,}061\,425)=0{,}307\,125\times0{,}938\,575)\approx0{,}228\,2$ soit environ 228 individus.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par

$$f(x)=0,75x(1-0,15x).$$

2. f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;1]$ et sur cet intervalle :

   $f'(x)=0,75(1-0,15x)-0,75x\times0,15=0,75-0,112\,5x-0,112\,5x=0,75-0,225x$.

   Or $0\leqslant x\leqslant1\Rightarrow0\leqslant0,225x\leqslant0,225\Rightarrow-0,225\leqslant-0,225x\leqslant0\Rightarrow$

   $0,75-0,225\leqslant0,75-0,225x\leqslant0,75$ ou enfin $0,525\leqslant f'(x)\leqslant0,75$.

   Sur $[0;1]$, $f'(x)>0$, donc $f$est strictement croissante de $f(0)=0$ à $f(1)=0,75\times0,85=0{,}637\,5$.

3. Sur $[0;\ 1]$, $f(x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) - x = 0 \iff$
$x[0,75(1-0,15x)-1] = 0 \iff x(0,75-0,1125x-1) = 0 \iff x(-0,25-0,1125x) = 0 \iff$
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \text{ ou} \\ -0,25-0,1125x & = 0 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \text{ ou} \\ -0,25 & = & 0,1125x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \text{ ou} \\ -\frac{0,25}{0,1125} & = & x \end{array}\right. .$$
Or $-\frac{0,25}{0,1125} < 0$ donc dans $[0;\ 1]$, $S = \{0\}$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. **a.** *Initialisation* : on a vu que $0 \leqslant 0,4095 \leqslant 0,6 \leqslant 1$, soit $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$: la relation est vraie au rang 0 ;

Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$; la fonction f étant strictement croissante sur $[0;\ 1]$, on a donc : $f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$,

soit puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,75 \times (1-0,15) = 0,6375 \leqslant 1$:

$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n naturel quelconque, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. La suite (u_n) est d'après la question précédente décroissante et minorée par 0 ; elle est donc est convergente.

c. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) converge vers un nombre $\ell \geqslant 0$ et ce nombre ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$, dont on a vu à la question **3.** qu'elle n'avait que 0 comme solution.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell = 0$.

5. **a.** L'étude précédente a montré que le nombre d'individus décroit, donc le biologiste a raison puisque la limite de la suite du nombre d'individus est égale à zéro.

b. L'algorithme calcule les termes de la suite tant que ceux-ci sont supérieurs à 0,02

Il s'arrête à $n = 11$ car $u_{10} \approx 0,019$

L'espèce sera donc menacée d'extinction en 2031.

Exercice 3 – Centres étrangers 2 – Juin 21

1. **a.** Retrancher 2 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{2}{100} = 1 - 0,02 = 0,98$.
D'une année sur l'autre on multiplie le nombre de panneaux par 0,98 puis on augment de nombre de panneaux de 250.

b. Avec la calculatrice il suffit de taper 10 560 Entrée puis $\times 0,98+50$.

Entrée donne $u_1 \approx 10599$, les appuis successifs de Entrée donnent u_2, u_3, etc.

On obtient $u_{68} \approx 12009$.

le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de 68 ans soit en 2088.

c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while u ⩽ 12000 :
    u = 0,98 * u + 250
    n = n + 1
```

2. *Initialisation* : $u_0 = 10560 \leqslant 12500$: la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 12500$ soit en multipliant par 0,98 :

$0,98u_n \leqslant 0,98 \times 12500$ et en ajoutant 250 à chaque membre :

$0,98u_n + 250 \leqslant 0,98 \times 12500 + 250$ ou $u_{n+1} \leqslant 12250 + 250$ et finalement $u_{n+1} \leqslant 12500$: la proposition est vraie au r ng $n+1$.

La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de la récurrence la proposition $u_n \leqslant 12500$ est vraie pur tout naturel $n \in \mathbb{N}$.

3. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = 250 - 0,02u_n$.

Or d'après le résultat précédent :

$u_n \leqslant 12500 \Rightarrow 0,02u_n \leqslant 0,02 \times 12500$ ou encore $0,02u_n \leqslant 250$ ou en ajoutant à chaque membre $-0,02u_n$:

$0 \leqslant 250 - 0,02u_n$; on a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 12 500 : elle est donc convergente vers une limite ℓ, telle que $\ell \leqslant 2500$.

5. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 12500 = 0,98u_n + 250 - 12500$, soit $v_{n+1} = 0,98u_n - 12250 = 0,98u_n - 12250 \times \frac{0,98}{0,98} = 0,98u_n - 12500 \times 0,98 = 0,98(u_n - 12500)$ soit enfin $v_{n+1} = 0,98v_n$: cette relation vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 de premier terme $v_0 = u_0 - 12500 = 10560 - 12500 = -1940$.

b. On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,98^n$, soit $v_n = -1940 \times 0,98^n$.

c. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 12500 \iff u_n = v_n + 12500 = 12500 - 1940 \times 0,98^n$.

d. Comme $0 < 0,98 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,98^n = 0$, donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 12500$

Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.