Interrogation de mathématiques n°1

Exercice 1 – 4 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$

Montrer par récurrence que $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 – 8 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\ 000$ et pour tout entier naturel *n*,

$$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9415$.

2. a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel *n* :
$u_n > 4000$.

b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.

3. Pour tout entier naturel *n*, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4000$.
a. Calculer v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. En déduire que pour tout entier naturel *n* :

$$u_n = 4000 + 6000 \times 0{,}95^n.$$

d. Quelle est la limite de la suite (v_n) ? Justifier la réponse.

4. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5% chaque début d'année.
Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : «l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation? Justifier la réponse.

Exercice 3 – 8 points

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel *n*, par :

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-dessous, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $n \leq u_n \leq n+1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

c. Démontrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.