Interrogation de mathématiques n°5 – Correction

1. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff \overrightarrow{\mathrm{O}M} = t\,\overrightarrow{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & 0 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

2. **a.** De $\overrightarrow{\mathrm{A}M}\begin{pmatrix} t-1 \\ t-3 \\ 0-2 \end{pmatrix}$, on calcule :

$\mathrm{A}M^2 = (t-1)^2 + (t-3)^2 + (-2)^2 = t^2 + 1 - 2t + t^2 + 9 - 6t + 4 = 2t^2 - 8t + 14$.

b. $2t^2 - 8t + 14 = 2\left(t^2 - 4t + 7\right) = 2\left[(t-2)^2 - 4 + 7\right] = 2\left[(t-2)^2 + 3\right]$.

La plus petite valeur de ce trinôme est obtenue quand le carré est nul, soit pour $t = 2$.

On a : $2t^2 - 8t + 14 \geqslant 6$, soit $\mathrm{A}M^2 \geqslant 6 \Rightarrow \mathrm{A}M \geqslant \sqrt{6}$.

La plus petite distance est $\mathrm{A}M_0 = \sqrt{6}$ avec $M_0(2\,;\,2\,;\,0)$.

3. On a : $\overrightarrow{\mathrm{A}M_0}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

On a : $\overrightarrow{\mathrm{A}M_0} \cdot \overrightarrow{u} = 1 - 1 + 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc les droites $(\mathrm{A}M_0)$ et d sont orthogonales.

4. $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au plan horizontal d'équation $z = 0$. Comme A' et M_0 appartiennent à ce plan le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{A}'M_0}$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\left(\mathrm{AA}'M_0\right)$,donc la droite (d) est orthogonale au plan $\left(\mathrm{AA}'M_0\right)$. Le point M_0 est donc le projeté orthogonal de O sur le plan $\left(\mathrm{AA}'M_0\right)$, donc $\mathrm{O}M_0$ est la distance la plus courte du point O au plan $\left(\mathrm{AA}'M_0\right)$.

5. Aire de la base $\mathrm{AA}'M_0$: on a $\mathrm{AA}' = 2$ et $\mathrm{A}'M_0^2 = (2-1)^2 + (2-3)^2 + 0^2 = 1 + 1 = 2$. D'où $\mathrm{A}'M_0 = \sqrt{2}$.

On a donc $\mathscr{A}\left(\mathrm{AA}'M_0\right) = \dfrac{2 \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

D'autre part : $\mathrm{O}M_0^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, d'où $\mathrm{O}M_0 = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} = h$.

Finalement $V = \dfrac{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{4}{3}$.