BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION AVRIL 2022

MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 16**

ÉPREUVE BLANCHE DU MARDI 26 AVRIL 2022

Ce sujet comporte pages numérotées de page 1/6 à page 6/6

Exercice 1 *5 points*

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit *g* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln(x)+2x-2$.

1. Déterminer les limites de *g* en $+\infty$ et 0.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction *g* sur $]0;+\infty[$.

3. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution a sur $]0;+\infty[$.

4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de *g* sur $]0;+\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction *f*

On considère la fonction *f*, définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\left(\ln(x)-1\right)$.

1. a. On admet que la fonction *f* est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa dérivée.

Démontrer que, pour tout *x* de $]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur $]0;+\infty[$.
Le calcul des limites n'est pas demandé.

2. Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de signes de *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction *F* admettant pour dérivée la fonction *f*

On admet qu'il existe une fonction *F* dérivable sur $]0;+\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction *f*. Ainsi, on a : $F'=f$.
On note C_F la courbe représentative de la fonction *F* dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.
1. Étudier les variations de *F* sur $]0;+\infty[$.

2. La courbe C_F représentative de *F* admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?
Justifier la réponse.

Exercice 2 *5 points*

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Partie A

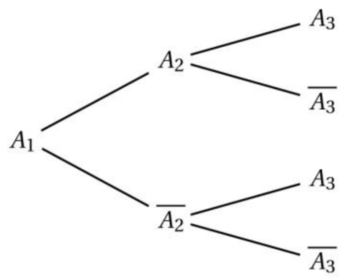
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- Parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- Parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geq 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine *n* ».

On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. a. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous, relatif aux trois premières semaines.



b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.

c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ? Arrondir au centième.

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geq 1$: $p_n = p(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $p_{n+1} = 0,5 p_n + 0,4$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilité qui ressemble à celui de la question 1.

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $p_n > 0,8$.

b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

c. La suite (p_n) est-elle convergente ?

4. On pose pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = p_n - 0,8$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

b. Exprimer v_n en fonction de *n*.

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

c. Déterminer la limite de la suite (p_n).

Partie B

1. Un matin, le vendeur reçoit 20 clients. On suppose que la probabilité qu'un client achète un melon est 0,8.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant un melon.
a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Quelle est la probabilité qu'au moins la moitié des clients achètent un melon ?

2. Combien de client faut-il au minimum dans la matinée pour que la probabilité de l'évènement « Au moins un client achète un melon » soit supérieure ou égale à 0,95 ? Justifier.

Exercice 3 *5 points*

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2;1;4)$, $(4;-1;0)$, $(0;3;2)$ et $(4;3;-2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2. Soit M un point de la droite (CD).
a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3;3;-1)$.
Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.

3. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

d. Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

4. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 4 *5 points*

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier.
À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel.

On note a_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ».
On note b_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ».
On note c_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».

À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.
Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} = \qquad \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?

2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel *n*, par $u_n = a_n - c_n$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.

b. Donner, pour tout entier naturel *n*, l'expression de u_n en fonction de *n*.

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \frac{4}{7}$ pour tout entier naturel *n*.

a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel *n*, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel *n*, $v_{n+1} = -\frac{1}{6} v_n$.

b. En déduire, pour tout entier naturel *n*, l'expression de v_n en fonction de *n*.

3. En déduire que pour tout entier naturel *n*, on a :

$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n \qquad c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?