Interrogation de mathématiques n°1

Exercice 1 – 3 points

1. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

Montrer par récurrence que $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout entier *n*, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.

a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Faire une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de *n*.

c. Démontrer cette conjecture.

Exercice 2 – 3 points

Déterminer la limite de la suite dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{3n^2 + 1}$ **2.** $v_n = \dfrac{3n^2 - 4}{n+1} - n$ **3.** $w_n = n + 2 - \cos n$

Exercice 3 – 3 points

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier *n*, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n > n^2$.

3. Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n).

Exercice 4 – 5 points

On s'intéresse à l'évolution d'une population de tigres dans une réserve en naturelle. En 2019, il y avait 100 tigres. Une étude a montré que chaque année, 10 % de la population de tigres meurt. En conséquence on introduit, chaque année, 5 nouveaux tigres à la réserve.
On note u_n le nombre de tigres en $2019+n$.

1. Déterminer le nombre de tigres dans la réserve en 2020.

2. Donner la valeur de u_0 et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 5$.

3. On pose $v_n = u_n - 50$

a. Montrer que (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Déterminer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de *n*.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

d. Interpréter dans le contexte les variations et la limites de la suite (u_n).

Exercice 5 – 6 points

Partie A

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

2. a. Établir que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

b. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

c. En déduire que (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

```
Def suite (n)
u = 2
For i in range (n)
u = (1 + 0,5u)/(0,5 + u)
Return (u)
```

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 9$. Les valeurs de *u* seront arrondies à 10^{-4}.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u									

Conjecturer le comportement de (u_n) à l'infini.

2. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de *n*.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $v_n \neq 1$.

b. montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).