

## Interrogation de mathématiques

### Exercice 1 – 3 points

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - 3}{3x^2 + 1} \right)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left( \frac{x - 3}{x - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} \right)$$

### Exercice 2 – 7 points

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  le nombre d'abonnés à son profil en l'année  $(2020 + n)$ , suivant cette modélisation. Ainsi  $u_0 = 1000$ .

1. Calculer  $u_1$ .

2. Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$ .

3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite(n) :
    u = 1000
    for i in range(n) :
        u = 0,9*u + 250
    return u
```

4. a. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 2500$ .

b. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

c. Déduire des questions précédentes que la suite  $(u_n)$  est convergente.

5. Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = u_n - 2500$  pour tout entier naturel  $n$ .

a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  et montrer que :

$$u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500.$$

c. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  et interpréter dans le contexte de l'exercice.

6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2200. Déterminer cette année.