Correction de l'interro n°2

exo 1

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^2-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 9$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{X\to 9} \sqrt{X} = 3$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{9x^2-1}{x^2+1}} = 3$

2. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x^2) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{array}\right\}$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x^2} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - e^{1-x^2}\right) = 2$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi x-1}{4x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi - \frac{1}{x}}{4+\frac{1}{x}} = \dfrac{\pi}{4}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{X\to\frac{\pi}{4}} \sin X = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x-1}{4x+1}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

exo 2

1. $f(x) = (3x^2+2x)^5$ De la forme u^n
avec $u = 3x^2+2x$
$u' = 6x+2$

$(u^n)' = n u' u^{n-1}$

Donc $f'(x) = 5(6x+2)(3x^2+2x)^4$
$= (30x+10)(3x^2+2x)^4$

2. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ De la forme $\sqrt{u}$
avec $u = x^2+1$
$u' = 2x$

$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Donc $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

3. $f(x) = e^{1-x^2}$ De la forme e^u
avec $u = 1-x^2$
$u' = -2x$.

$(e^u)' = u'e^u$

Donc $f'(x) = -2x\, e^{1-x^2}$.

exo 3

1. $f(x) = -x^3+3x^2-1$
$= x^3\left(-1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right) = -1$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = -3x^2+6x$

$\Delta = 6^2$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

x	$-\infty$		0		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-17

3. $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = 1$ $\quad f'(1) = 3$

Donc $y = 3(x-1) + 1$

$\boxed{y = 3x - 2}$

4. $f''(x) = -6x + 6$

x	$-\infty$	1	4
$f''(x)$	$+$	0	$-$
f	convexe		concave.

$f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = 1$.
Donc $\mathcal{C}_f$ admet un pt d'inflexion en $x = 1$

5. La tangente est en dessous de $\mathcal{C}_f$ sur $]-\infty ; 1]$ et au dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $[1 ; 4]$.
car la fonction f est convexe sur $]-\infty ; 1]$ et concave sur $[1 ; 4]$

exo 4

1c $f'(0) = 15$. car $m = \frac{20-5}{1-0} = 15$

2a $f(0) = 5$ donc $\boxed{b = 5}$

$f'(0) = 15$ $\quad f'(x) = (ax + a + b)e^x$

$f'(0) = a + b = 15$

$a + 5 = 15$

$\boxed{a = 10}$

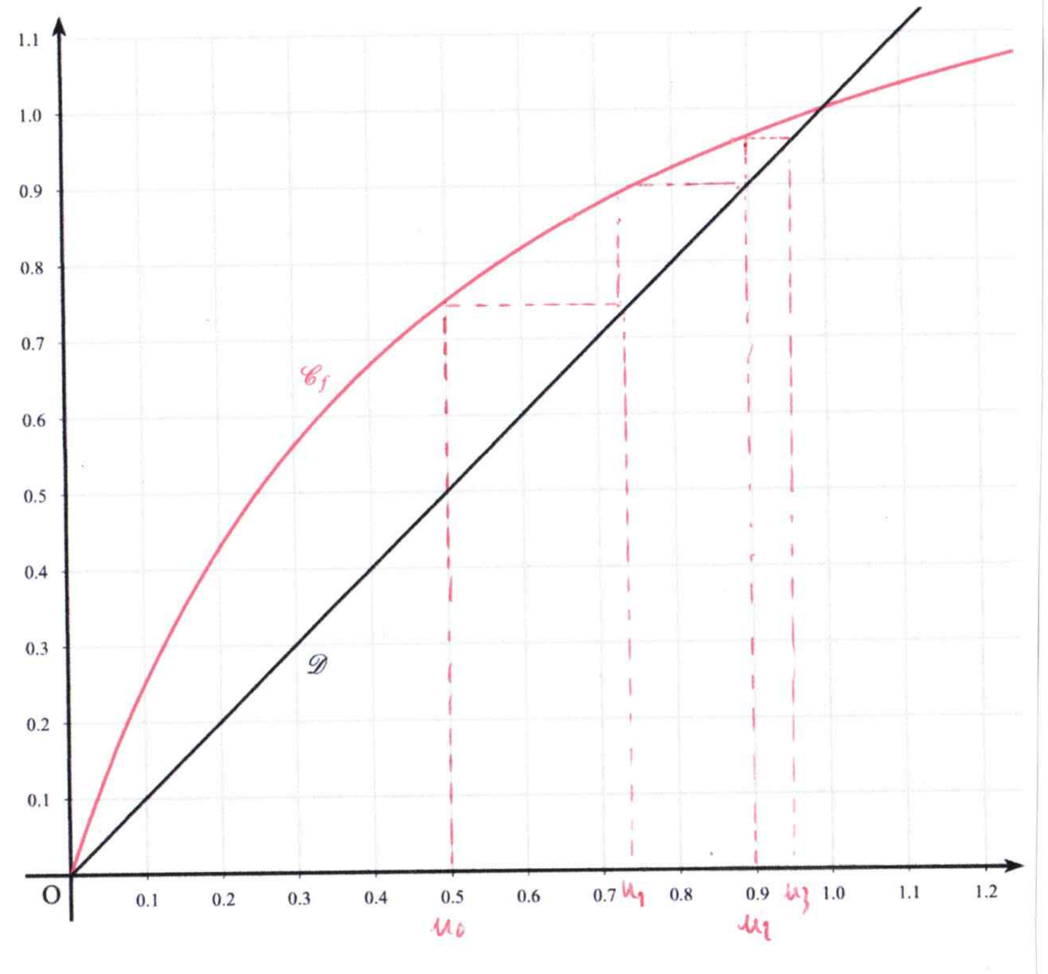
3c. $f''(x)$ s'annule en changeant de signe pour $x = -1,5$ (en C)

4d.

exo 5

1a. $u_1 = \frac{3u_0}{1+2u_0} = \frac{3 \times \frac{1}{2}}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$ $\qquad u_2 = \frac{3u_1}{1+2u_1} = \frac{3 \times \frac{3}{4}}{1 + 2 \times \frac{3}{4}} = \frac{9}{10}$

b.



c. il semble que (u_n) soit croissante et tendre vers 1

2a. $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$

$v_{n+1} = \dfrac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}}$

$v_{n+1} = \dfrac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}}$

$v_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \times \dfrac{1+2u_n}{1-u_n}$

$v_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1-u_n}$

$v_{n+1} = 3v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. $v_n = v_0 \cdot q^n$ $\qquad v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

$v_n = 1 \times 3^n$

$v_n = 3^n$

c. $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$

$v_n(1-u_n) = u_n$

$v_n - v_n \cdot u_n = u_n$

$v_n = u_n + v_n \cdot u_n$

$v_n = u_n(1+v_n)$

$u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n}$

$u_n = \dfrac{3^n}{1+3^n}$

d. $u_n = \dfrac{3^n}{1+3^n}$

$= \dfrac{3^n \times 1}{3^n\left(\frac{1}{3^n}+1\right)}$

$= \dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$