Interrogation de mathématiques n°2

Exercice 1 – 3 points

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{9x^2-3}{x^2+1}}\right)$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-e^{1-x^2}\right)$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\left(\dfrac{\pi x-1}{4x+1}\right)\right)$

Exercice 2 – 3 points

Déterminer les dérivées suivantes :

1. $f(x)=\left(3x^2+2x\right)^5$ **2.** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ **3.** $f(x)=e^{1-x^2}$

Exercice 3 – 5 points

Soit C_f la courbe représentative dans un repère de la fonction *f* définie sur $]-\infty;4]$ par :

$$f(x)=-x^3+3x^2-1$$

1. Déterminer la limite de *f* en $-\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction *f* sur $]-\infty;4]$ et dresser le tableau de variations (avec les valeurs aux bornes).

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

4. Étudier la convexité de *f* et montrer que la courbe C_f présente un point d'inflexion.

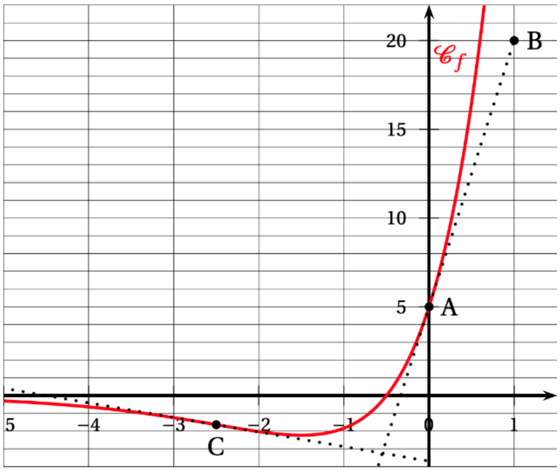
5. Déduire des questions précédentes le signe de *h* définie sur $]-\infty;4]$ par :

$$h(x)=f(x)-(3x-2)$$

Exercice 4 – 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Le graphique ci-après donne la représentation graphique C_f dans un repère orthogonal d'une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On notera f' la fonction dérivée de *f*.
On donne les points *A* de coordonnées $(0;5)$ et *B* de coordonnées $(1;20)$.
Le point *C* est le point de la courbe C_f ayant pour abscisse $-2,5$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe C_f au point I.
Les questions 1 à 3 se rapportent à cette même fonction *f*.



1. On peut affirmer que :

a. $f'(-0,5)=0$

b. si $]-\infty;-0,5[$, alors $f'(x)<0$

c. $f'(0)=15$

d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que la fonction *f* représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(ax+b)e^x$, où *a* et *b* sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0,5;0)$.

On peut affirmer que :

a. $a=10$ et $b=5$

b. $a=2,5$ et $b=-0,5$

c. $a=-1,5$ et $b=5$

d. $a=0$ et $b=5$

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction *f* est définie sur par : $f''(x)=(10x+25)e^x$.

On peut affirmer que :

a. La fonction *f* est convexe sur $\mathbb{R}$

b. La fonction *f* est concave sur $\mathbb{R}$

c. Le point *C* est l'unique point d'inflexion de C_f

d. C_f n'admet pas de point d'inflexion

4. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

* pour tout entier naturel *n*, $u_n \leq v_n$; * $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = 2$.

On peut affirmer que :

a. la suite (u_n) converge

b. pour tout entier naturel *n*, $v_n \leq 2$

c. la suite (u_n) diverge

d. la suite (u_n) est majorée

Exercice 5 – 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\frac{3x}{1+2x}$.

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

$$u_0=\frac{1}{2} \text{ et par } u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. a. Calculer u_1 et u_2.

b. On a tracé, en annexe, la courbe C_f représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et la droite D d'équation $y=x$.

Sur le graphique en annexe, placer sur l'axe des abscisses, u_0, u_1, u_2 et u_3.

Faire apparaître les traits de construction.

c. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n puis montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{3^n}{3^n+1}$.

d. Montrer que l'on peut mettre u_n sous la forme : $u_n=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ puis déterminer la limite de la suite (u_n).

ANNEXE EXERCICE 5