BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DECEMBRE 2022

MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 16**

ÉPREUVE BLANCHE DU LUNDI 05 DECEMBRE 2022

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de page 1/7 à page 7/7

Exercice 1 : fonctions *6 points*

On considère la fonction *f* définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit *g* la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + e^x$.

1. Étudier les variations de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$. (Les limites ne sont pas attendues).

2. En déduire le signe de *g* sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Déterminer la limite de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. On appelle f' la dérivée de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel *x*,
   $$f'(x) = e^{-x} g(x)$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $[-1; 0]$

   b. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

   c. En déduire le signe de *f* sur $\mathbb{R}$.

5. **a.** On admet que $f''(x) = (x-2)e^{-x}$. Etudier la convexité de *f* sur $\mathbb{R}$.

   b. En déduire que *f* admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

Exercice 2 : probabilités *5 points*

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

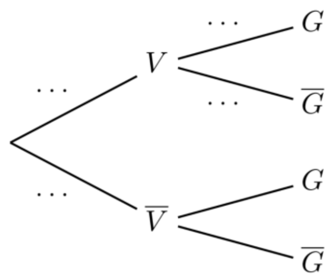
- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :

- V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;
- G : « la personne a contracté la grippe ».

1. **a.** Donner la probabilité de l'événement G.

b. Recopier et compléter les pointillés indiqués sur quatre des branches de l'arbre pondéré représenté ci-dessous.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.
Après la période hivernale, on interroge au hasard 40 habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à 40 tirages successifs indépendants et avec remise.
On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les 40 interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

2. **a.** Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

c. Déterminer le nombre moyen de personnes vaccinées dans ce groupe de 40 personnes interrogées.

Exercice 3 : suites *5 points*

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année. On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps.
Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (un) où un représente l'effectif de la population au début de l'année $2020+n$.
On admet que pour tout entier naturel *n*, $u_n \geq 0$.
Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100$$

2. Calculer u_1 puis u_2.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n* : $1000 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel *n* par $v_n = u_n - 1000$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.

b. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $u_n = 1000\left(1+0,9^n\right)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil *S* (avec $S > 1000$).

a. Déterminer le plus petit entier *n* tel que $u_n \leq 1200$. Justifier la réponse par un calcul.

b. Dans le programme Python ci-dessous, la variable *n* désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable *u* désigne l'effectif de la population.
Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil *S*.

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while ......:
    u= ...
    n = ...
  return ...
```

Exercice 4 : fonctions et suites *4 points*

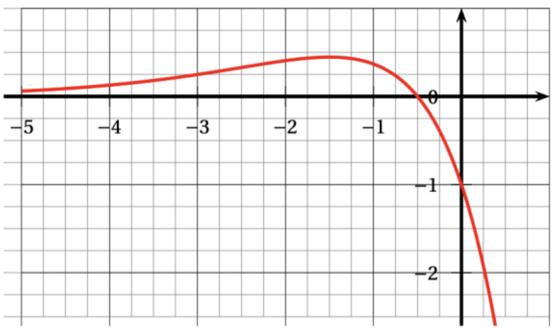
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour les questions 1 à 3 ci-dessous, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe de sa fonction dérivée f' est donnée ci-dessous.

On admet que f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et que sa courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Question 1 :

On rappelle que la courbe ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f.



a. La fonction f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$;

b. La fonction f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$;

c. La fonction f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$;

d. Au point d'abscisse -1, la courbe de la fonction f admet une tangente horizontale.

Question 2 :

a. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$;

b. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$;

c. La courbe C_f représentant la fonction f n'admet pas de point d'inflexion ;

d. La fonction f est concave sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$.

Question 3 :

La dérivée seconde f'' de la fonction f vérifie :

a. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$;

b. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [-2 ; 1-1]$;

c. $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$;

d. $f''(-3) = 0$.

Question 4 :

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). On sait que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq v_n \leq w_n$ et de plus : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} w_n = 3$.

On peut alors affirmer que :

a. la suite (v_n) converge ;

b. Si la suite (u_n) est croissante alors la suite (v_n) est minorée par u_0 ;

c. $1 \leq v_0 \leq 3$;

d. la suite (v_n) diverge.