Interrogation de mathématiques n°1 bis

Exercice 1 – 12 points

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2. On considère la fonction terme ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
      u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n-1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction terme (n) renvoie la valeur de u_n.

3. Soit la fonction *f* définie sur $]-3;+\infty[$ par : $f(x) == \frac{-x-4}{x+3}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction *f* est strictement croissante sur $]-3;+\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$.

a. Donner v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

c. En déduire que pour tout entier naturel $n > 1$: $u_n = \frac{1}{n+0,5} - 2$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 – 8 points

La fonction f est définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer la limite de f en -1. Interpréter le résultat.

3. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

4. Déterminer le signe de $f'(x)$ et construire le tableau de variation de f sur $]-1;+\infty[$.