Interrogation de mathématique n°5

Exercice 1 *10 points*

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = 2e^{-x}$$

dans laquelle *y* désigne une fonction inconnue de la variable réelle *x*, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) : y' + y = 0$$

2. Soit la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2xe^{-x}$$

Vérifier que *g* est solution de l'équation (E).

3. On admet que toute solution *h* de (E) s'écrit sous la forme $f + g$, où *f* désigne une solution de l'équation (E_0) et *g* est la fonction ci-dessus.

a. Déterminer la forme des solutions de l'équation (E).

b. Déterminer la solution *h* de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $h(0) = -1$.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (2x + k)e^{-x}$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

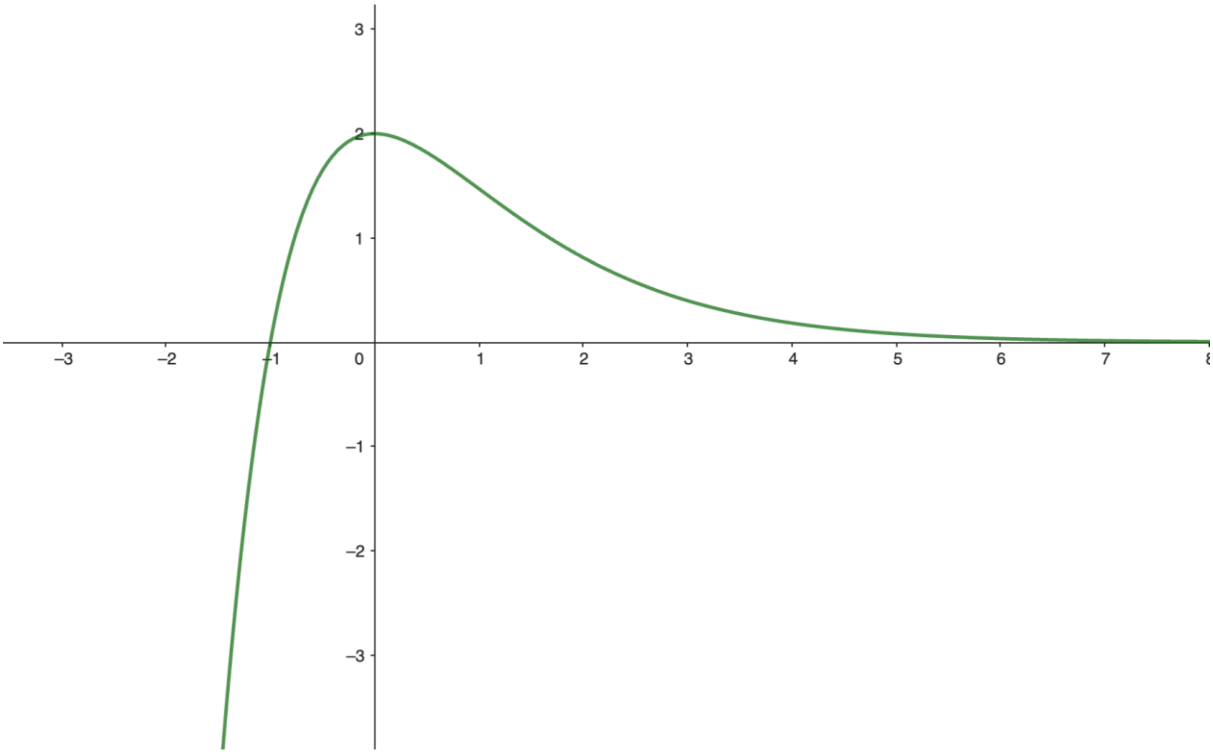
1. Déterminer la limite de f_k en $-\infty$.

On admet que $\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$

2. Calculer $f_k'(x)$ pour tout *x* réel, et montrer que $f_k'(x) = (-2x - k + 2)e^{-x}$

3. En déduire le tableau de variations de f_k sur $\mathbb{R}$. On expliquera pourquoi f_k admet $2e^{\frac{k-2}{2}}$ comme maximum sur $\mathbb{R}$.

4. Le graphique ci-dessous représente une courbe C_k qui est la représentation d'une fonction f_k.



A l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel *k* correspondant.

Exercice 2 *10 points*

Au basket, il existe deux sortes de tir :

- Les tirs à deux points.
  Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis.

- Les tirs à trois points.
  Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

- Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60 % sont réussis.
- Parmi les tirs à trois points, 35 % sont réussis.

1. Stéphanie réalise un tir.
On considère les évènements suivants :
D : « Le tir est à deux points » et R : « le tir est réussi ».

a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. Calculer la probabilité $P(D \cap R)$.

c. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à 0,4125.

d. Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points. Arrondir le résultat au centième.

2. Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.
On considère que les tirs sont indépendants.
On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.

a. Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus.
Arrondir le résultat au millième.

d. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs.
Arrondir le résultat au millième.

3. Soit n un entier naturel non nul.
Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points. On considère que les tirs sont indépendants.
On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.
Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à 0, 99.