BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION MARS 2024

MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 16**

ÉPREUVE BLANCHE DU VENDREDI 15 MARS 2024

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de page 1/7 à page 7/7
dont une annexe à rendre avec la copie.

Exercice 1 *5 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1 :

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n entier naturel par $u_n = \dfrac{1+2^n}{3+5^n}$.

Cette suite :

a. diverge vers $+\infty$

b. converge vers $\dfrac{2}{5}$

c. converge vers 0

d. converge vers $\dfrac{1}{3}$.

Question 2 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$

L'expression de la fonction dérivée de f est :

a. $f'(x) = 2x \ln x$.

b. $f'(x) = x(2\ln x + 1)$.

c. $f'(x) = 2$.

d. $f'(x) = x$.

Question 3 :

On considère une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de h	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

On note H la primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Elle vérifie la propriété :

a. H est positive sur $]-\infty;0]$.

b. H est croissante sur $]-\infty;1]$.

c. H est négative sur $]-\infty;1]$.

d. H est croissante sur $\mathbb{R}$.

Question 4 :
Soit deux réels a et b avec $a < b$.
On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a;b]$ et qui s'annule en un réel α .
Parmi les propositions suivantes, la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α à 0,001 est :

a.
```
def racine(a, b) :
    while abs(b − a) >= 0.001 :
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            b = m
        else :
            a = m
    return m
```

c.
```
def racine(a, b) :
    m = (a + b)/2
    while abs(b − a) <= 0.001 :
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

b.
```
def racine(a, b) :
    m = (a + b)/2
    while abs(b − a) >= 0.001 :
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

d.
```
def racine (a, b) :
    while abs (b − a) >= 0.001 :
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

Question 5 :
Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 7 sont bleues et les autres vertes.
On effectue trois tirages successifs avec remise. La probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes est :

a. $\left(\frac{7}{10}\right)^2 \times \frac{3}{10}$

b. $\binom{10}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$

c. $\left(\frac{3}{10}\right)^2$

d. $\binom{3}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$

Exercice 2 *6 points*

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction *u* définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.
Résoudre l'équation différentielle (E').

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer l'unique solution *g* de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_k(x) = (x+k)e^{-x}$$

où *k* est un nombre réel donné.
On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.
1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1-k$.

2. On note M_k le point de la courbe C_k d'abscisse $1-k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

3. Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas.
Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :

- La courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$;
- La courbe C_k d'équation $y = (x+k)e^{-x}$ pour un certain nombre réel *k* donné.

a. Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

b. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel *k* correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 (x+2)e^{-x}dx$.
Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

Exercice 3 *4 points*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx\,.$$

1.

a. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b. Calculer u_1. En déduire u_0.

2. Montrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n > 0$.

3.

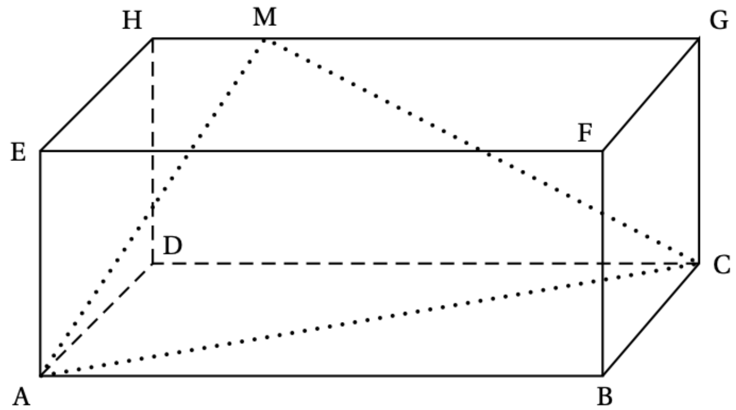
a. Montrer que pour tout entier naturel *n* non nul, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel *n* non nul, $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 *5 points*

Dans la figure ci-dessous, *ABCDEFGH* est un parallélépipède rectangle tel que $AB=5$, $AD=3$ et $AE=2$.
L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine *A* dans lequel les points *B*, *D* et *E* ont respectivement pour coordonnées $(5;0;0)$, $(0;3;0)$ et $(0;0;2)$.



1.

a. Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points *H* et *G*.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).

2. Soit *M* un point du segment $[GH]$ tel que $\overrightarrow{HM}=k\overrightarrow{HG}$ avec *k* un nombre réel de l'intervalle $[0;1]$.

a. Justifier que les coordonnées de *M* sont $(5k;3;2)$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}=25k^2-25k+4$.

c. Déterminer les valeurs de *k* pour lesquelles *AMC* est un triangle rectangle en *M*.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point *M* a pour coordonnées $(1;3;2)$.
On admet que le triangle *AMC* est rectangle en *M* .
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{1}{3}\times\text{Aire de la base}\times h$ où *h* est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point *K* de coordonnées $(1;3;0)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).

b. Justifier que le point *K* est le projeté orthogonal du point *M* sur le plan (ACD).

c. En déduire le volume du tétraèdre *MACD*.

4. On note *P* le projeté orthogonal du point *D* sur le plan (AMC).
Calculer la distance *DP* ; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

ANNEXE 1 (exercice 2)
(À rendre avec la copie)