# Correction de l'interro n°7

## exo1

1. $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1$
$= \ln 2 - \ln 1$
$= \ln 2$

2a. $u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx.$
$= \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x}\,dx.$
$= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}\,dx.$
$= \int_0^1 x^n\,dx.$
$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$
$= \frac{1}{n+1}$

b. $u_0 + u_1 = \frac{1}{0+1}$
$\ln 2 + u_1 = 1$
$u_1 = 1 - \ln 2$

3. Il semble que $(u_n)$ soit décroissante et tende vers 0

4a. $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx.$
$= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x}\,dx.$
$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,dx.$

Comme $0 \leq x \leq 1$ alors $x^n \geq 0$
$1+x > 0$
et $x - 1 < 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0.$
Donc $(u_n) \searrow$

b. Comme $0 < x < 1$ alors $x^n \geq 0$
$1+x \geq 0$

Donc $\frac{x^n}{1+x} \geq 0$

Donc $u_n \geq 0$
$(u_n) \searrow$ et minorée par 0 converge.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

on a $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$ et $\lim \frac{1}{n+1} = 0$

Par passage à la limite on a : $\ell + \ell = 0$
$2\ell = 0$
$\ell = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

no 2

Posons $u = \ln x$ $\quad u' = \frac{1}{x}$

$v' = x^2$ $\quad v = \frac{x^3}{3}$

$$\int_1^e x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}\,dx .$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right] - \int_1^e \frac{x^2}{3}\,dx .$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_1^e$$

$$= \frac{e^3\ln e}{3} - \frac{e^3}{9} - \left(\frac{1^3\ln 1}{3} - \frac{1^3}{9}\right)$$

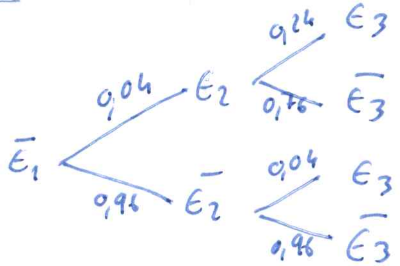
$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{3e^3 - e^3 + 1}{9}$$

$$= \frac{2e^3+1}{9}$$

## ex 3

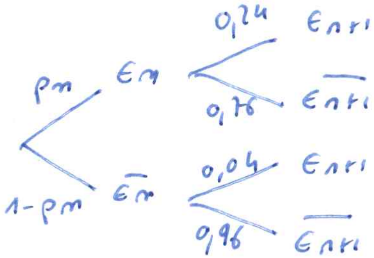
1.




$p_3 = P(E_3) = P(E_2 \cap E_3) + P(\overline{E_2} \cap E_3)$
$= 0{,}04 \times 0{,}24 + 0{,}96 \times 0{,}04$
$= 0{,}048$

2. $P_{E_3}(E_2) = \dfrac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \dfrac{0{,}04 \times 0{,}24}{0{,}048} = 0{,}2$

3.




4. $P(E_{n+1}) = P(E_n \cap E_{n+1}) + P(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$

$p_{n+1} = p_n \times 0{,}24 + (1-p_n) \times 0{,}04$

$p_{n+1} = 0{,}24p_n + 0{,}04 - 0{,}04p_n$

$p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}04$

5a. $u_n = p_n - 0{,}05$

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}05$
$= 0{,}2p_n + 0{,}04 - 0{,}05$
$= 0{,}2p_n - 0{,}01$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{0{,}2p_n - 0{,}01}{p_n - 0{,}05}$
$= \dfrac{0{,}2(p_n - 0{,}05)}{p_n - 0{,}05}$
$= 0{,}2$

Donc $(u_n)$ est géométrique de raison $q = 0{,}2$

et de 1er terme $u_1 = p_1 - 0{,}05$
$= 0 - 0{,}05$
$= -0{,}05$

b. $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$
$u_n = -0{,}05 \cdot 0{,}2^{n-1}$

or $u_n = p_n - 0{,}05$

Donc $p_n = u_n + 0{,}05$
$p_n = -0{,}05 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}05$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^{n-1} = 0$ car $-1 < 0{,}2 < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}05$

## exo 4

1. On a $-1 \le \cos x \le 1$

$1 \le \cos x + 2 \le 3$

Donc $\cos x + 2 \neq 0$

Donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2a. $f(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)}$

$= \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$

$= f(x)$ Donc $f$ est $2\pi$-périodique.

b. $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}$

$= \dfrac{-\sin x}{2+\cos x}$

$= -f(x)$ Donc $f$ est impaire

c. $f$ est $2\pi$ périodique donc on peut étudier $f$ sur $[-\pi;\pi]$ est en déduire l'étude sur $\mathbb{R}$ par translation de vecteur $2k\pi\vec{i}$.

$f$ est impaire donc on peut étudier $f$ sur $[0;\pi]$ et en déduire l'étude sur $[-\pi,\pi]$ par symétrie de centre $0$

3. $f'(x) = \dfrac{\cos x(2+\cos x) - (-\sin x)(\sin x)}{(2+\cos x)^2}$

$= \dfrac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2}$

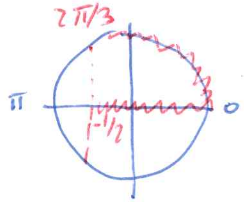
$= \dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$

4. $(2+\cos x)^2 \geq 0$ car c'est un carré.

$f'(x)$ dépend du signe de $1+2\cos x$. (sur $[0;\pi]$)

Posons $1+2\cos x \geq 0$

$\cos x \geq -\frac{1}{2}$




Donc $x \in [0;\frac{2\pi}{3}]$

| $x$ | $0$ | | $2\pi/3$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\searrow$ | $0$ |

$f(\frac{2\pi}{3}) = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2+\cos\frac{2\pi}{3}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}/2}{2-\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}/2}{3/2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$