AMMAR Elazar Tle

Interrogation de mathématiques n°4

Le sujet est composé de deux parties.
La première de 20 min sans calculatrice et la deuxième de 1h15min avec la calculatrice.

Partie 1 – Sans calculatrice : 20 min

Exercice 1 – 5 points

5

Compléter le tableau suivant :

Fonction	Primitive
$f(x)=3x-5$	$F(x)=$ $\frac{3}{2}x^2-5x$
$f(x)=x^2-x+2$	$F(x)=$ $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x$
$f(x)=2e^x+\frac{1}{x}$	$F(x)=$ $2e^x+\ln(x)$
$f(x)=xe^{x^2}$	$F(x)=$ $\frac{1}{2}e^{x^2}$
$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$	$F(x)=$ $\ln(x^2+x+1)$
$f(x)=\frac{1}{3x+1}$	$F(x)=$ $\frac{1}{3}\ln(3x+1)$
$f(x)=\frac{e^x+1}{e^x+x}$	$F(x)=$ $\ln(e^x+x)$
$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2}$	$F(x)=$ $\ln(x+1)-\frac{1}{x}$
$f(x)=(2x+1)(x^2+x)^3$	$F(x)=$ $\frac{(x^2+x)^4}{4}$
$f(x)=(x-2)(x^2-4x)^9$	$F(x)=$ $\frac{1}{2}\times\frac{(x^2-4x)^{10}}{10}$

$= \frac{(x^2-4x)^{10}}{20}$

Correction de l'interro 4.

Exo 2

$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$

$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x) + c \quad c \in \mathbb{R}$

Posons $F(1) = 0$

$\frac{1}{2} \ln(1^2+2\times1) + c = 0$

$\frac{1}{2} \ln 3 + c = 0$

$c = -\frac{1}{2} \ln 3$

Donc $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x) - \frac{1}{2} \ln 3$

ou $F(x) = \dfrac{\ln\left(\frac{x^2+2x}{3}\right)}{2}$

Exo 3

1. $g(x) = ae^{-x}$

$g'(x) = -ae^{-x}$

$g'(x) + 2g(x) = 3e^{-x}$

$-ae^{-x} + 2 \, ae^{-x} = 3e^{-x}$

$ae^{-x} = 3e^{-x}$

Donc $a = 3$

2. $y' + 2y = 0$

$y' = -2y$

Les solutions sont de la forme $y = ce^{-2x}, \ c \in \mathbb{R}$

3. $\Rightarrow$ Soit f solution de E.

Donc $f' + 2f = 3e^{-x}$ (1)

On sait que g sol de (E)

Donc $g' + 2g = 3e^{-x}$ (2)

(1) - (2) donne : $f' + 2f - (g' + 2g) = 3e^{-x} - 3e^{-x}$

$f' - g' + 2f - 2g = 0$

$(f-g)' + 2(f-g) = 0$

Donc $f - g$ sol de (E').

$\Leftarrow$ Supposons $f-g$ sol de (E')

On a. $(f-g)' + 2(f-g) = 0$

$f' - g' + 2f - 2g = 0$

$f' + 2f = g' + 2g = 3e^{-x}$

Donc $f' + 2f = 3e^{-x}$

Donc f solution de (E)

4. $f-g$ sol de (E')

Donc $f-g = Ce^{-2x}$ $C \in \mathbb{R}$

$f(x) = Ce^{-2x} + g(x)$

$f(x) = Ce^{-2x} + 3e^{-x}$ $C \in \mathbb{R}$.

5. Posons $h(0) = 2$

$Ce^{-0} + 3e^{-0} = 2$

$C + 3 = 2$

$C = -1$

Donc $h(x) = -e^{-2x} + 3e^{-x}$.

Exo 4

1. le debit entrant = débit sortant

Donc la quantité d'eau reste constante dans le reservoir.

2. 100L d'eau pur : $y(0) = 0$.

3. $20y' + y = 20$

$y' = -\frac{1}{20}y + 1$

Les solutions sont de la forme : $y = Ce^{-1/20\, t} - \frac{+1}{-\frac{1}{20}}$ $C \in \mathbb{R}$

$y = Ce^{-1/20\, t} + 20$ $C \in \mathbb{R}$.

b Comme $y(0) = 0$

alors $Ce^{0} + 20 = 0$

$\underline{C = -20}$

$y(t) = -20e^{-1/20\, t} + 20$

4. a $\lim_{x \to +\infty} e^{-0{,}05x} = 0$ Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 20$

la quantité de sel va tendre vers 20 kg dans le reservoir.

b. $f(x) = 20 - 20e^{-0{,}05x}$

$f'(x) = -20 \times (-0{,}05)\, e^{-0{,}05x}$

$f'(x) = e^{-0{,}05x} > 0$

Donc f croissante sur $[0, +\infty[$.

c. Posons $f(t) \geq 10$

$20 - 20e^{-0{,}05t} \geq 10$

$-20e^{-0{,}05t} \geq -10$

$e^{-0{,}05t} \leq \frac{1}{2}$ car $-20 < 0$

$-0{,}05t \leq \ln(\frac{1}{2})$

$t \geq \frac{\ln(1/2)}{-0{,}05}$ car $-0{,}05 < 0$

$t \geq 13{,}9$

A partir de 14min, la quantité de sel dépassera 10 kg