Interrogation de mathématiques n°5

Exercice 1 – 2 points

Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 x^2 dx$ $J = \int_1^e \frac{dx}{x}$ $K = \int_{-1}^1 e^{3t} dt$ $L = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$

Exercice 2 – 2 points

En remarquant que $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(x)dx$.

Exercice 3 – 3 points

On définit la fonction F par $F(x)=\int_1^x \ln(x)dx$, pour tout $x\geq 1$.

1. Déterminer $F'(x)$ et en déduire son signe sur $[1;+\infty[$.

2. Construire le tableau de variation de F sur $[1;+\infty[$.

3. En déduire le signe de $F(x)$.

Exercice 4 – 3 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$, et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Calculer l'aire en cm^2 de la portion de plan comprise entre C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \pi$

Exercice 4 – 7 points

Un réservoir contient initialement 100 litres d'eau pure. De l'eau salée, contenant 0,2 kg de sel par litre, est introduite dans le réservoir à un débit de 5 litres par minute.
Simultanément, le mélange (supposé homogène) est évacué du réservoir au même débit de 5 litres par minute.
On note $y(t)$ la quantité de sel (en kg) présente dans le réservoir à l'instant t (en minutes).
On suppose que y vérifie l'équation :

$$(E) : 20y' + y = 20$$

1. Expliquer pourquoi le volume d'eau dans le réservoir reste constant.

2. Déterminer la condition initiale $y(0)$.

3. a. Résoudre l'équation (E).

b. Exprimer la quantité de sel $y(t)$ en fonction du temps t.

4. On suppose, dans la suite de l'exercice, que la quantité de sel dans le réservoir est donné par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 20 - 20e^{-0,05x}$$

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

b. Déterminer les variations de f sur $[0;+\infty[$ et construire son tableau de variation.

c. A partir de quel moment la quantité de sel dépassera 10 kg ? On donnera le résultat arrondi à la minute près.