Interrogation de mathématiques n°5

Exercice 1 – 6 points

Les deux parties 1 et 2 sont indépendantes.

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- À l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- Si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- Si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur.
Pour tout entier naturel *n* non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la *n*-ième semaine ».

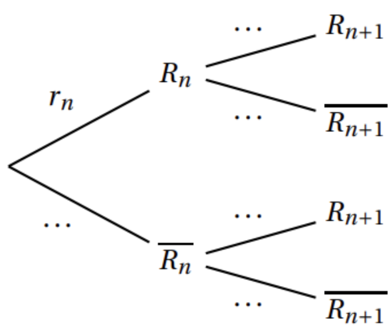
1. a. Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.

b. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

c. Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.

d. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. Pour tout entier naturel *n* non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la *n*-ième semaine. On a alors $r_n = p\left(R_n\right)$.
a. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

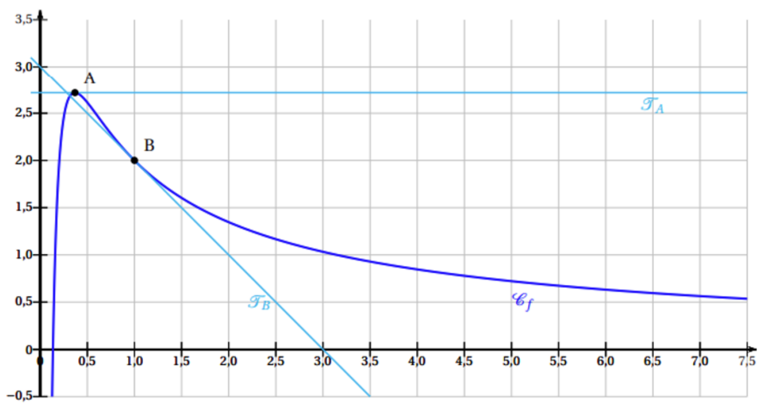
d. Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 – 6 points

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- La courbe représentative C_f d'une fonction *f* définie et dérivable sur $]0;+\infty[$;
- La tangente T_A à la courbe C_f au point *A* de coordonnées $\left(\frac{1}{e};e\right)$;
- La tangente T_B à la courbe C_f au point *B* de coordonnées $(1;2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;3)$.



PARTIE I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.

2. En déduire une équation de la droite T_B.

PARTIE II

On suppose maintenant que la fonction *f* est définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2+\ln(x)}{x}$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe C_f passe par les points *A* et *B* et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand *x* tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand *x* tend vers $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x\in]0;+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{-1-\ln(x)}{x^2}$$

4. Dresser le tableau de variations de *f* sur $]0;+\infty[$.

5. On note f'' la fonction dérivée seconde de *f*. On admet que, pour tout $x\in]0;+\infty[$

$$f''(x)=\frac{1+2\ln(x)}{x^3}$$

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel *f* est convexe.

Exercice 3 – 4 points

On considère l'équation différentielle

$$(E): y'+\frac{1}{4}y=20e^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue *y*, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel *a* tel que la fonction *g* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=axe^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle

$$(E'): y'+\frac{1}{4}y=0,$$

d'inconnue *y*, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution *f* de l'équation différentielle (E) telle que $f(0)=8$.

Exercice 4 – 4 points

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = xe^{x^2}$.
Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

2. En déduire la valeur de I_1.

3. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$.
Aide : poser $v' = g(x)$.

4. Calculer I_3 et I_5.