BB1 - Correction

Exercice 1

1. • $u_1 = \frac{3}{4} \times 1 + 0 + 1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4} = 1,75$;
   • $u_2 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{21}{16} + \frac{4}{16} + \frac{16}{16} = \frac{41}{16} = 2,5625$.

2. **a.** Dans la cellule B3 : =0,75*B2 + 0,25*A2 +1.
   b. La suite (u_n) semble être croissante.

3. **a.** *Initialisation* : au rang 0 : on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 0+1$, soit $0 \leqslant 1 \leqslant 1$.
   Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
   En multipliant par le nombre positif $\frac{3}{4}$, on a $\frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1)$, puis en ajoutant à chaque terme $\frac{1}{4}n+1$:
   $\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n + 1$, soit
   $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+1+\frac{3}{4}$ et enfin
   $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant (n+1)+1$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.
   La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$: on a démontré par le principe de récurrence que quel que soit le naturel n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
   b. Les termes de la suite sont encadrés par des entiers consécutifs de plus en plus grands, donc la suite est croissante.
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$, par le principe d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. .
   c. On a pour tout naturel $n \geqslant 1$: $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ soit en multipliant par $\frac{1}{n}$ non nul : $\frac{n}{n} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n}{n+1}$ ou
   $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n}{n+1}$.
   Or comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, par le principe d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}(u_n - n) = \frac{3}{4}v_n$.
   Cette égalité montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = u_0 = 1$.
   b. On sait alors que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
   Or $v_n = u_n - n \iff u_n = v_n + n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice 2

Partie I : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \ln(x) + 2x - 2$.

1. On détermine les limites de g en $+\infty$ et 0.
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2 = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0} 2x-2 = -2\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = -\infty$$
2. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et $g'(x) = \dfrac{1}{x} + 2 > 0$; donc la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. On établit le tableau des variations de la fonction g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. $g(1) = 0$ donc $\alpha = 1$.
On en déduit que $g(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$, et que $g(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

Partie II : étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$par : $f(x) = \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)[\ln(x) - 1]$.

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :
$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)(\ln(x) - 1) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x) - 1 + 2x - 1}{x^2} = \frac{\ln(x) + 2x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$
b. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ qui s'annule pour $x = 1$.
$$f(1) = \left(2 - \frac{1}{1}\right)(\ln(1) - 1) = -1$$
On dresse le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2. $f(x) = 0 \iff \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1) = 0 \iff 2 - \dfrac{1}{x} = 0$ ou $\ln(x) - 1 = 0$

$\iff 2 = \dfrac{1}{x}$ ou $\ln(x) = 1 \iff x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = \text{e}$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions sur $]0\,;\,+\infty[$: $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = \text{e}$.

On complète le tableau de variations de f en intégrant les solutions de l'équation $f(x) = 0$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1		e		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit le tableau de signes de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie III : étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f. Ainsi, on a : $F' = f$. On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Par définition $F' = f$, donc le signe de $F'(x)$ est celui de $f(x)$. On en déduit les variations de la fonction F sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
F	$\Vert$	F croissante		F décroissante		F croissante	

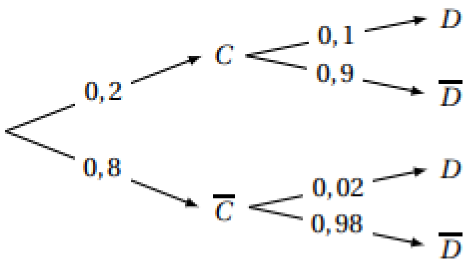
2. Le coefficient directeur de la tangente en $x = a$ à la courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de F est $F'(a)$ soit $f(a)$. Pour que $\mathscr{C}_F$ admette des tangentes parallèles à l'axe des abscisses, il faut trouver des valeurs de x pour lesquelles $F'(x) = 0$ c'est-à -dire $f(x) = 0$.

D'après les questions précédentes, on peut dire $\mathscr{C}_F$ admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, en $x = \frac{1}{2}$ et en $x = \text{e}$.

Exercice 3

Partie 1

Puisque la commande est faite au hasard, on assimile les proportions à des probabilités. On en déduit l'arbre pondéré suivant :



1. $P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D) = 0,2 \times 0,1 = 0,02$.

La probabilité d'avoir un casque contrefait présentant un défaut est donc de 0,02.

2. Les évènements C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on en déduit :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(C \cap D) + P\left(\overline{C} \cap D\right) \\ &= 0,02 + 0,8 \times 0,02 \\ &= 1,8 \times 0,02 \\ &= 0,036 \end{aligned}$$

La probabilité de commander un casque présentant un défaut de conception est donc de 0,036.

3. On demande ici de calculer la probabilité conditionnelle : $P_D(C)$

$P_D(C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,02}{0,036} = \dfrac{5}{9} \approx 0,556$ à 10^{-3} près.

Partie 2

1. a.
- On a une expérience aléatoire de base (on commande un casque), pour laquelle on considère deux issues. Pour cette épreuve de Bernoulli, le succès (le casque présente un défaut) a une probabilité $p = 0,036$. (d'après la question **2.** de la **partie 1**) ;
- On répète cette expérience $n = 35$ fois, de façon indépendante (puisque la répétition est assimilable à un tirage **avec** remise) ;
- La variable aléatoire X compte le nombre de succès sur les 35 répétitions.

Ces éléments permettent de confirmer que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(35 ; 0,036)$

b. On veut calculer $P(X = 1)$.

$P(X = 1) = \dbinom{35}{1} \times 0,036^1 \times (1 - 0,036)^{35-1} = 35 \times 0,036 \times 0,964^{34} \approx 0,362$ à 10^{-3} près.

c. Calculons : $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0,639$ à 10^{-3} près (à la calculatrice).

(la formule n'est pas obligatoire)

2. Ici, pour tout entier n naturel non nul, on peut créer une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,0,036)$.

Pour n un entier naturel non nul, la probabilité qu'un casque au moins présente un défaut sur n casques commandés est donc :

$\text{P}(X_n \geqslant 1) = 1 - \text{P}(X_n = 0) = 1 - \dbinom{n}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^n = 1 - 0,964^n$.

On résout donc sur $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\text{P}(X_n \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,964^n \geqslant 0,99 \\
&\iff -0,964^n \geqslant -0,01 \\
&\iff 0,964^n \leqslant 0,01 \\
&\iff \ln(0,964^n) \leqslant \ln(0,01) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\
&\iff n\ln(0,964) \leqslant \ln(0,01) \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \qquad \text{car} \ln(0,964) < 0
\end{aligned}$$

or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \approx 125,6$, donc les solutions sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 126.

Il faut donc commander au moins 126 casques pour que la probabilité d'en avoir au moins un défectueux soit supérieure à 0,99.

Exercice 4

1. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$.
Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2022$

a. n'admet aucune solution.

b. admet exactement une solution.

c. admet exactement deux solutions.

d. admet une infinité de solutions.

On a : $f(x) = 2022 \iff \ln\left(1+x^2\right) = 2022 \iff e^{\ln\left(1+x^2\right)} = e^{2022} \iff 1+x^2 = e^{2022} \iff$
$x^2 = e^{2022} - 1$: ce nombre étant positif, l'équation a deux solutions : $\sqrt{e^{2022}-1}$ et $-\sqrt{e^{2022}-1}$
Réponse **c.**

2. Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = x\ln(x) - x^2$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. La fonction g est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. La fonction g est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. La courbe $\mathscr{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$.

d. La courbe $\mathscr{C}_g$ admet exactement deux points d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$.

Sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable et sur cet intervalle, $f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 2x = \ln(x) - 2x + 1$.

Puis $f''(x) = \dfrac{1}{x} - 2$.

On a donc $f''(x) = 0 \iff \dfrac{1}{x} - 2 = 0 \iff \dfrac{1}{x} = 2 \iff x = \dfrac{1}{2}$.

Sur $]0\,;\,+\infty[$, f a un seul point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{1}{2}$. Réponse **c.**

3. La fonction $x \longmapsto \ln\left(-x^2 - x + 6\right)$ est définie sur

a. $]-3\,;\,2[$

b. $]-\infty\,;\,6]$

c. $]0\,;\,+\infty[$

d. $]2\,;\,+\infty[$

La fonction est définie si $-x^2 - x + 6 > 0 \iff x^2 + x - 6 < 0$.

Le trinôme $x^2 + x - 6$ a une racine évidente : 2. Le produit des racines étant égal à -6, l'autre racine est donc -3.

Donc $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$. On sait que ce trinôme est positif sauf (ce que l'on cherche) entre les racines -3 et 2.

La fonction est donc définie sur l'intervalle $]-3\,;\,2[$. Réponse **a.**

4. On considère la fonction f définie sur $]0,5\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x-1)$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a. $y = 4x - 7$ **b.** $y = 2x - 4$

c. $y = -3(x-1) + 4$ **d.** $y = 2x - 1$

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

- $f(1) = 1 - 4 + 3\ln(2-1) = -3 + 3 \times 0 = -3$;
- $f'(x) = 2x - 4 + 3 \times \dfrac{2}{2x-1} = 2x - 4 + \dfrac{6}{2x-1}$, d'où $f'(1) = 2 - 4 + \dfrac{6}{1} = -2 + 6 = 4$.

Une équation de la tangente est donc $y - (-3) = 4(x-1) \iff y = 4x - 4 - 3 \iff y = 4x - 7$.
Réponse **a.**

5. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est :

a. $S =]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$ **b.** $S =]1\,;\,+\infty[$

c. $S = \emptyset$ **d.** $S =]-1\,;\,1[$

D'après l'énoncé il faut que $x > -3$ et que $x > -1$. Il faut donc résoudre l'inéquation dans l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

$\ln(x+3) < 2\ln(x+1) \iff \ln(x+3) < \ln(x+1)^2 \iff x+3 < (x+1)^2 \iff 0 < x^2+2x+1-x-3 \iff 0 < x^2 + x - 2$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc il faut que $x > -1$ et que $x > 1$ ou $x < -2$.
ccl : $S =]1;+\infty[$ réponse **b**