BACCALAURÉAT GENERAL

SESSION DECEMBRE 24

MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 16**

ÉPREUVE BLANCHE DU VENDREDI 20 DECEMBRE 2024

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de page 1/5 à page 1/5

Exercice 1 – 5 points

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-dessous, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2.

a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leq u_n \leq n+1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

c. Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice 2 – 5 points

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln(x) + 2x - 2$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0;+\infty[$.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution a sur $]0;+\infty[$.

4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0;+\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction *f*

On considère la fonction *f*, définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1)$$

1.

a. On admet que la fonction *f* est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur $]0;+\infty[$.

Le calcul des limites n'est pas demandé.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de signes de *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction *F* admettant pour dérivée la fonction *f*

On admet qu'il existe une fonction *F* dérivable sur $]0;+\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction *f*. Ainsi, on a : $F' = f$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction *F* dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de *F* sur $]0;+\infty[$.

2. La courbe C_f représentative de *F* admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.

Exercice 3 – 5 points

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les évènements suivants :

- C : « le casque est contrefait » ;
- D : « le casque présente un défaut de conception » ;

$\overline{C}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de C et D.

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(D) = 0,036$.

3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque.
On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale $B(n, p)$, où $n = 35$ et $p = 0,036$.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.

c. Calculer $P(X \leq 1)$.

2. Dans cette question, n n'est pas fixé.
Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieure à 0,99 ?

Exercice 4 – 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les six questions sont indépendantes. Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction *f* définie pour tout réel *x* par $f(x)=\ln(1+x^2)$.

Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=2022$:

a. n'admet aucune solution.

b. admet exactement une solution.

c. admet exactement deux solutions.

d. admet une infinité de solutions.

2. Soit la fonction *g* définie pour tout réel *x* strictement positif par : $g(x)=x\ln(x)-x^2$

On note C_g sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. La fonction *g* est convexe sur $]0;+\infty[$.

b. La fonction *g* est concave sur $]0;+\infty[$.

c. La courbe C_g admet exactement un point d'inflexion sur $]0;+\infty[$.

d. La courbe C_g admet exactement deux points d'inflexion sur $]0;+\infty[$.

3. La fonction $x\mapsto \ln(-x^2-x+6)$ est définie sur

a. $]-3;2[$

b. $]-\infty;6]$

c. $]0;+\infty[$

d. $]2;+\infty[$

4. On considère la fonction *f* définie sur $]0,5;+\infty[$ par $f(x)=x^2-4x+3\ln(2x-1)$.

Une équation de la tangente a la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 1 est :

a. $y=4x-7$

b. $y=2x-4$

c. $y=-3(x-1)+4$

d. $y=2x-1$

5. L'ensemble *S* des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3)<2\ln(x+1)$ est :

a. $S=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

b. $S=]1;+\infty[$

c. $S=\varnothing$

d. $S=]-1;1[$