Exercice 1 : Polynésie 4 mai 22 S1

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A$(2\,;\,-1\,;\,0)$ B$(1\,;\,0\,;\,-3)$, C$(6\,;\,6\,;\,1)$ et E$(1\,;\,2\,;\,4)$;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x-y-z+4=0$.

1. **a.** On veut démontrer que le triangle ABC est rectangle en A ; on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4+7-3=0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est donc rectangle en A.

b. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=5-6+12=11$.

$\text{BA}=\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{11}$ et $\text{BC}=\sqrt{5^2+6^2+4^2}=\sqrt{77}$

c. On cherche la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ arrondie au degré.
On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\text{BA}\times\text{BC}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right) &\iff 11=\sqrt{11}\times\sqrt{77}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\iff 11=\sqrt{11}\times\sqrt{11}\times\sqrt{7}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\iff \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)=\frac{1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

La calculatrice donne $\widehat{\text{ABC}}\approx 68°$ au degré près.

2. **a.** On veut démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

Un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car ABC est un triangle rectangle.
De plus $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(-1)-1\times1-1\times(-3)=-2-1+3=0$
et
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times4-1\times7-1\times1=8-7-1=0$
$\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal de ce plan et du plan $\mathscr{P}$.
Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

b. On déduit une équation cartésienne du plan (ABC).
Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $2x-y-z+d=0$, comme A appartient à ce plan, on a : $5+d=0$ soit $d=-5$.
Une équation de (ABC) est donc $2x-y-z-5=0$.

c. On détermine une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.
Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{n}$
On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D}\iff\overrightarrow{EM}=t\overrightarrow{n}$, avec $t\in\mathbb{R}$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl}x-1&=&2t\\y-2&=&-t,\quad t\in\mathbb{R}\\z-4&=&-t\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&1+2t\\y&=&2-t,\quad t\in\mathbb{R}.\\z&=&4-t\end{array}\right.$$

d. On démontre que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.
H correspond à l'intersection du plan (ABC) avec la droite perpendiculaire à (ABC) qui passe par E soit la droite $\mathscr{D}$, les coordonnées de H seront donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 2x-y-z-5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 2(1+2t)-(2-t)-(4-t)-5=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 6t-9=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ x = 4 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $V = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
On va calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à 16,5 unités de volume.
$AC = \sqrt{4^2+7^2+1^2} = \sqrt{66}$ et donc $\mathscr{B} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{\sqrt{11}\times\sqrt{66}}{2} = \dfrac{11\sqrt{6}}{2}$
HE est la hauteur de la pyramide et $\overrightarrow{HE}\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$
On a par suite $HE = \sqrt{(-3)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{27}{2}}$ puis
$\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{11\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{\dfrac{27}{2}} = \dfrac{11\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times3\sqrt{3}}{3\times2\times\sqrt{2}} = \dfrac{33}{2} = 16,5$

Exercice 2 : Amérique du nord mai 24 S2

1. Le trinôme $g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\,1]$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$.

Or on sait que $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow -x \leqslant 0 \leqslant 1-x$ ou en lisant de droite à gauche

$1 - x \geqslant 0 \Rightarrow 2(1-x) \geqslant 0 \iff g'(x) \geqslant 0$: la dérivée étant positive sur $[0\,;\,1]$ et ne s'annulant qu'en $x = 1$, la fonction g est strictement croissante de $g(0) = 0$ à $g(1) = 2 - 1^2 = 1$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. • $u_1 = 2 \times \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0,75$;

• $u_2 = 2 \times \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{24}{16} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{15}{16} = 0{,}9375$.

3. Démonstration par récurrence :

• *Initialisation* :

On a $0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < 1$, soit $0 < u_0 < u_1 < 1$: l'encadrement est vrai au rang zéro.

• *Hérédité* : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

Alors par stricte croissance sur $[0; 1]$ de la fonction g, on a :

$g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$, soit d'après les résultats précédents :

$0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$: l'encadrement est encore vrai au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est encore au rang $n+1$: par le principe de récurrence, on a donc

Pour tout entier naturel n, : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est majorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \leqslant 1$.

5. La relation $g(u_n) = u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$ donne à la limite car g est continue car dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$: $\ell = 2\ell - \ell^2 \iff$

$\ell - \ell^2 = 0 \iff \ell(1-\ell) = 0$ soit

$\begin{cases} \ell & = & 0 \text{ ou} \\ 1-\ell & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ell & = & 0 \text{ ou} \\ 1 & = & \ell \end{cases}$

La solution $\ell = 0$ n'est pas possible (la suite est croissante) ; il reste $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1-u_n)$.

6. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(1-u_{n+1}) = \ln\left[1-\left(2u_n - u_n^2\right)\right] = \ln\left(1-2u_n+u_n^2\right) = \ln(1-u_n)^2 = 2\ln(1-u_n)$ (car $1-u_n > 0$ voir la récurrence ci-dessus, donc $\ln(1-u_n)$ existe). Or $\ln(1-u_n) = v_n$.

Finalement : $v_{n+1} = 2v_n$ ce qui montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \ln(1-u_0) = \ln\left(1-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

7. On sait qu'alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n$, soit $v_n = -\ln 2 \times 2^n$.

8. La relation $v_n = \ln(1-u_n)$ donne donc :

$-\ln 2 \times 2^n = \ln(1-u_n) \iff \mathrm{e}^{-\ln 2\times 2^n} = \mathrm{e}^{\ln(1-u_n)}$, (par croissance de la fonction exponentielle), soit encore :

$\mathrm{e}^{-\ln 2\times 2^n} = 1-u_n \iff u_n = 1-\mathrm{e}^{-\ln 2\times 2^n}$.

Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln 2\times 2^n = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\ln 2\times 2^n} = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

9.

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=n + 1
        u=2*u - u**2
    return n
```

Exercice 3 : Centres étrangers 2 juin 24 S2

1. **a.** La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc : $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} > 0$.

Par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{x\to 1} x - 1 = 0$, et comme on travaille sur $]-\infty\,;\,1[$, on a $x-1<0$. (on peut noter $\lim\limits_{x\to 1} x-1 = 0^-$).

Par limite du quotient, on a : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

b. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale, d'équation $x = 1$.

2. On a : $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$;

Par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{x\to -\infty} x - 1 = -\infty$,

Par limite du quotient, on en déduit : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet également une asymptote, d'équation $y = 0$, au voisinage de $-\infty$.

3. **a.** f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[$, en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle, avec la fonction au dénominatuer ne s'annulant pas sur l'intervalle.

$$\forall x \in]-\infty\,;\,1[,\quad f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times (x-1) - \mathrm{e}^x \times 1}{(x-1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x \times (x-1-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$$

b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, et pour tout x dans $]-\infty\,;\,1[$, $(x-1)^2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $(x-2)$.

$x-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$, donc sur $]-\infty\,;\,1[$, $(x-2)$ est strictement négatif, donc $f'(x)$ également.

Finalement, on peut donc en déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$, et donc, on a le tableau de variations suivant (avec les limites justifiées aux questions **1. a.** et **2.**) :

x	$-\infty$		1
signe de $f'(x)$		$-$	‖
variations de f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖

4. **a.** Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on va étudier le signe de $f''(x)$.

Comme, pour tout x dans $]-\infty\,;\,1[$, on a $(x-1)<0$ et donc $(x-1)^3<0$ et $\mathrm{e}^x>0$, on en déduit que le signe de $f''(x)$ est l'opposé du signe du trinôme : x^2-4x+5.

Or, ce trinôme a un discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times 5 = -4$ qui est strictement négatif, donc n'admet pas de racine, et donne des images strictement positives (car le coefficient dominant est positif) pour tout réel x.

b. Pour déterminer l'équation de T, il nous faut connaître $f'(0)$ et $f(0)$:

- $f'(0) = \dfrac{(0-2)\mathrm{e}^0}{(0-1)^2} = \dfrac{-2}{1} = -2$;
- $f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{0-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

La formule classique donne une équation pour T :

$y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff y = -2x-1$

L'équation réduite de T est donc : $y = -2x-1$.

c. Puisque f est concave sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, la courbe $\mathscr{C}$ est donc située sous ses tangentes, notamment sous la tangente T, sur cet intervalle.

Pour tout réel x dans cet intervalle, l'ordonnée d'un point sur la courbe $\mathscr{C}$ (c'est-à-dire $f(x)$) est donc inférieure ou égale à l'ordonnée du point ayant la même abscisse sur la tangente T (or, sur la tangente T, l'ordonnée du point d'abscisse x est $-2x-1$, d'après la question précédente).

On en déduit donc : $x \in]-\infty\,;\,1[\implies f(x) \leqslant -2x-1$

$$\begin{aligned} &\implies \frac{\mathrm{e}^x}{x-1} \leqslant -2x-1 \\ &\implies \mathrm{e}^x \geqslant (x-1)(-2x-1) \\ &\qquad \text{car sur }]-\infty\,;\,1[,\quad x-1<0 \\ &\implies \mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1) \end{aligned}$$

On arrive donc à l'inégalité demandée.

5. a. La fonction f est :

- continue sur $]-\infty\,;\,1[$ (car dérivable sur cet intervalle) ;
- strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$ (d'après la question **3. b.**) ;
- telle que -2 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{1} f = -\infty$;

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. Comme on a repéré à la question **4. b.** que $f(0) = -1$, on sait que la solution sera à chercher dans l'intervalle $]0\,;\,1[$.

À l'aide de la calculatrice, par balayage, on a :

- $f(0{,}31) \approx -1{,}98 > -2$;
- $f(0{,}32) \approx -2{,}03 < -2$;

Un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est $0{,}31 < \alpha < 0{,}32[$.

Exercice 4 : Polynésie sept 24 S1

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + x$.

Affirmation A : La fonction f admet pour tableau de variations le tableau ci- dessous :

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Affirmation A vraie

Affirmation B : L'équation $f(x) = -2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
variations de f	$-\infty$	-2	$+\infty$

La fonction f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et va de $-\infty$ à $+\infty$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Affirmation B fausse

2. **Affirmation C** : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\dfrac{1}{3}$.

Pour $x \neq 0$, on a : $\dfrac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = \dfrac{x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}\right)}{3x^2} = -\dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2} - \dfrac{2}{x^2}\right)$

- $\dfrac{\ln(x)}{x^2} = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$

  On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$.
- On sait aussi que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2} - \dfrac{2}{x^2}\right) = 1$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\dfrac{1}{3}$.

Affirmation C vraie

3. On considère la fonction k définie et continue sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 1 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$.

Affirmation D : Il existe une primitive de la fonction k décroissante sur $\mathbb{R}$.

Toute primitive K de la fonction k a pour dérivée k. Or, pour tout réel X, on a $\mathrm{e}^{X} > 0$. Donc pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$, donc $1 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$, et donc $k(x) > 0$.

La primitive K a donc une dérivée toujours strictement positive, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Affirmation D fausse

4. On considère l'équation différentielle (E) : $3y' + y = 1$.

Affirmation E : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E) avec $g(0) = 5$.

- $g(x) = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$ donc $g(0) = 4\,\mathrm{e}^{0} + 1 = 4 + 1 = 5$
- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 4 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} = -\dfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$.

  Donc $3g'(x) + g(x) = 3 \times \left(-\dfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right) + \left(4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1\right) = -4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 = 1$

  Donc la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation E vraie

5. **Affirmation F** : Une intégration par parties permet d'obtenir : $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}$.

En prenant : $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & x \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$, on a : $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 1 \\ v(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$

Cela donne par intégration par parties :

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}.$$