BACCALAURÉAT GENERAL

SESSION MAI 25

MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 16

ÉPREUVE BLANCHE DU VENDREDI 02 MAI 2025

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de page 1/5 à page 5/5

Exercice 1 – 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal où l'on considère :

- Les points $A(2; -1; 0)$, $B(1; 0; -3)$, $C(6; 6; 1)$ et $E(1; 2; 4)$;
- Le plan P d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

- a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .
 - b. Calculer le produit scalaire $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$ puis les longueurs BA et BC .
 - c. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$, arrondie au degré.
- a. Démontrer que le plan P est parallèle au plan (ABC) .
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E .
 - d. Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base. Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide est égal à 16,5 unités de volume.

Exercice 2 – 6 points

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

2. Calculer u_1 et u_2 .
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$0 < u_n < u_{n+1} < 1.$$

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite l de la suite (u_n) .

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de v_n en fonction de n .
8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.
9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.5
    while u < 0.95 :
        n = ...
        u = ...
    return n
```

Exercice 3 – 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-\infty; 1[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-\infty; 1[$. On appelle C sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.
b. En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[-\infty; 1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$

b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\infty; 1[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[-\infty; 1[$, on a

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}.$$

- a.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-\infty; 1[$.
- b.** Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
- c.** En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $[-\infty; 1[$, on a :

$$e^x \geq (-2x-1)(x-1).$$

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-\infty; 1[$.
- b.** À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Exercice 4 – 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

Affirmation A : La fonction f admet pour tableau de variations le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f		

Affirmation B : L'équation $f(x) = -2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

2. **Affirmation C** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$.

3. On considère la fonction k définie et continue sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 1 + 2e^{-x^2+1}$.

Affirmation D : Il existe une primitive de la fonction k décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. On considère l'équation différentielle $(E) : 3y' + y = 1$.

Affirmation E : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4e^{\frac{1}{3}x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E) avec $g(0) = 5$.

5. **Affirmation F** : Une intégration par parties permet d'obtenir :

$$\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}$$