

Interrogation de mathématiques n°1

Exercice 1 – 4 points

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3^n - 2^n)$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \cos(n)}{n^2}$

Exercice 2 – 6 points

Pour chaque question, une seule des 4 réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n entier naturel par $u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}$

Cette suite :

a. diverge vers $+\infty$

c. converge vers 0

b. converge vers $\frac{2}{5}$

d. converge vers $\frac{1}{3}$.

2. Une suite (u_n) est minorée par 3 et converge vers un réel l . On peut affirmer que :

a. $l = 3$

c. La suite (u_n) est décroissante.

b. $l \geq 3$

d. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

3. On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n entier naturel par :

$$1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

On peut affirmer que :

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

b. (u_n) converge vers un nombre compris entre 1 et 2

c. Si (u_n) est croissante alors elle tend vers 2

d. On ne peut rien conclure sur la limite de (u_n)

Exercice 3 – 10 points

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 40 \\ u_{n+1} = 0.008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0;100]$ l'équation $f(x) = x$.
3.
 - a. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;100]$ et dresser son tableau de variations.
 - b. En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$.
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - d. Déterminer la limite l de la suite (u_n) .

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p):  
    n=0  
    u = 40  
    while u < p :  
        n = n+1  
        u = 0.008*u*(200-u)  
    return(n+2021)
```

- a. L'exécution de `seuil(100)` ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.
 - b. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'année à partir de laquelle le nombre d'oiseaux dépassera 74.