

Correction interro n°2

exo 1

$$1. \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+1}{9x^2+1} &= \frac{4}{9} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{4}{9}} \sqrt{x} &= \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \text{Par composition de limites on a:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x^2+1}{9x^2+1}} = \frac{2}{3}$$

$$2. \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{(\sqrt{x+7})^2 - 3^2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{x+7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$= \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+7}+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} (1-2x) = 1-2 \times 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1) = 1^2-1 = 0$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2-1		$+$	$-$	$+$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$$

exo 2

$$1. \text{ On a: } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad \text{avec } u = 3x^2+1$$

$$u' = 6x$$

$$\text{Dnc } f'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}$$

$$= \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$$

$$2. \text{ On a } (\cos u)' = -u' \sin u \quad \text{avec } u = 3x^2+1$$

$$u' = 6x$$

$$\text{Dnc } f'(x) = -6x \cos(3x^2+1)$$

exo 3

$$1. u_1 = \frac{2x^2+1}{2+2} = \frac{5}{4}$$

$$2. a. \alpha_0 = \frac{2}{2-1} = 2 \quad a_1 = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}-1} = 5$$

$$b. a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1}$$

$$= \frac{\frac{2u_{n+1}}{u_{n+1}+2}}{\frac{2u_{n+1}}{u_{n+1}+2}-1} = \frac{\frac{2u_{n+1}}{u_{n+1}+2}}{\frac{2u_{n+1}-u_{n+1}-2}{u_{n+1}+2}} = \frac{2u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \frac{2u_{n+1}}{u_{n+1}-1} \times \frac{u_{n+2}}{u_{n+2}}$$

$$= \frac{2u_{n+1}}{u_{n+1}-1}$$

$$\text{Dc } \textcircled{+} 3a_{n-1} = \frac{3u_n}{u_n-1} - 1$$

$$= \frac{3u_n - u_n - 1}{u_n-1} = \frac{2u_n+1}{u_n-1} = a_{n+1}$$

c. (I) par $n=1$

$$a_1 = 5 > 3 \times 1 - 1 \quad \text{vrai par } n=1$$

(ii) supposons qu'il existe un entier $n \neq 0$ tq

$$a_n \geq 3n-1$$

$$\text{ng } a_{n+1} \geq 3(n+1)-1$$

$$\text{cad } a_{n+1} \geq 3n+2$$

$$\text{Gn a } a_n \geq 3n-1$$

$$\Rightarrow 3a_n - 1 \geq 3(3n-1) - 1 \quad \text{car } 3 > 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \geq 9n - 3 - 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \geq 9n - 4$$

or on sait que $n \geq 1$

$$6n \geq 6 \quad \text{car } 6 > 0$$

$$9n - 3n \geq 2 + 4$$

$$9n - 4 \geq 3n + 2$$

$$\text{Dmc } a_{n+1} \geq 3n+2$$

$$\text{ccl: } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \geq 3n-1$$

$$\text{d. } \lim_{n \rightarrow +\infty} (3n-1) = +\infty \quad \text{dmc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

$$\text{3a Gn a: } a_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow a_n (u_{n-1}) = u_n$$

$$\Leftrightarrow a_n \cdot u_{n-1} - a_n = u_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a_n \cdot u_{n-1} - u_{n-1} = a_n$$

$$\Leftrightarrow u_{n-1} (a_n - 1) = a_n$$

$$\Leftrightarrow u_{n-1} = \frac{a_n}{a_n - 1}$$

$$\text{b. } u_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_n \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

$$\text{Dmc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \quad \text{Dmc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1-0} = 1$$

ha u correspond à u_n et n est l'indice à partir duquel $u_n \leq p$, p donné par l'utilisateur.

$$\text{b. } n=6$$

exo 4

2. ℓ_2 en dessous de l'axe des abscisses
 sur $] -\infty; -2]$ et ℓ_1 est décroissante sur cet intervalle
 donc $\ell_1 \rightarrow g'$
 $\ell_2 \rightarrow g'$

1. $g(0) = 1$ Dmc T: $y = g'(0)(x-0) + g(0)$
 $g'(0) = 2$ $y = 2x + 1$

3.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$
g	$+\infty$	$-1,2$	$1,1$	0	

exo 5

- (A) 1. $g'(x) = 3x^2 + 9 > 0$
 Dmc $g \nearrow$ sur $\mathbb{R}$

2.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	$-\infty$	$+\infty$

3 $g(0) = -2 < 0$
 $g(1) = 8 > 0$

Comme $g \nearrow$ sur $[0; 1]$ alors l'éq. $g(x) = 0$
 admet une unique solution sur $[0; 1]$.

4. A l'aide de la calculatrice: $x \approx 0,221 \times 10^{-3}$

5

x	$-\infty$	x	$+\infty$
$g(x)$	$-$	ϕ	$+$

car $g \nearrow$ sur $\mathbb{R}$.
 et $g(x) = 0$

(B)

1. $f(x) = \frac{x^3(1 + \frac{1}{x^3})}{x^2(1 + \frac{3}{x^2})} = x \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^2}}$

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^2}} = 1$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{aligned}
 2. \quad f'(x) &= \frac{3x^2(x^2+3) - 2x(x^3+1)}{(x^2+3)^2} \\
 &= \frac{3x^4 + 9x^2 - 2x^4 - 2x}{(x^2+3)^2} \\
 &= \frac{x^4 + 9x^2 - 2x}{(x^2+3)^2} \\
 &= \frac{x(x^3 + 9x - 2)}{(x^2+3)^2} \\
 &= \frac{xg(x)}{(x^2+3)^2}
 \end{aligned}$$

3. Comme $(x^2+3)^2 > 0$ alors $f'(x)$ est du signe de $x \cdot g(x)$

x	$-\infty$	0	∞	$+\infty$
x	-	0	+	+
$g(x)$	-	-	0	+
$xg(x)$	+	0	-	+

$$\Delta = 0,221 > 0$$

4.

x	$-\infty$	0	∞	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
f	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	$+\infty$

$f(x)$

$$5. \quad y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$f(1) = \frac{1^3+1}{1^2+3} = \frac{1}{2}$$

$$f'(1) = \frac{1(1^3+9 \cdot 1 - 2)}{(1^2+3)^2}$$

$$= \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad \text{Dmc } y = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

7. Posons $f'(x) = 1$ (m coefficient directeur)

$$\frac{x(x^3+9x-2)}{(x^2+3)^2} = 1$$

$$x^4 + 9x^2 - 2x = (x^2+3)^2$$

$$x^4 + 9x^2 - 2x = x^4 + 6x^2 + 9$$

$$3x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-9)$$

$$\Delta = 4 + 108$$

$$\Delta = 112 > 0$$

Dmc il existe 2 tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à la droite d'eq. $y=x$.